Álgebra III

Práctica 3 – Primer Cuatrimestre de 2007

Cuerpos de descomposición, extensiones normales y grupo de Galois

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Todo polinomio no constante se factoriza linealmente sobre algún cuerpo.

ii) El cuerpo de descomposición de un polinomio es único, salvo isomorfismos.

iii) Toda extensión de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.

iv) Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es el cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$ entonces E es el cuerpo de descomposición de f visto como polinomio en $L[X]$.

Ejercicio 2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

i) $X^p - a$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{N} - \mathbb{N}^p$.

ii) $X^3 - 10$, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}\,]$.

iii) $X^4 - 5$, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}\,]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}\,]$ y $\mathbb{Q}[i]$.

iv) $X^4 + 2$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[i]$.

v) $\prod_{i=1}^{n} \big(X^2 - p_i\big)$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.

vi) $X^3 - 2$, sobre $\mathbb{Z}_7$.

vii) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$, sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}\,]$ y sobre $\mathbb{Z}_5$.

viii) $X^n - t$, sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.

ix) $X^4 - t$, sobre $\mathbb{R}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios $X^3 + 2X + 1$ y $X^3 + X^2 + X + 2$ sobre $\mathbb{Z}_3$. Probar que son isomorfos como extensiones de $\mathbb{Z}_3$.

Ejercicio 4. Calcular los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{Z}_5$. ¿Son isomorfos entre ellos?

Ejercicio 5. Sea E/K una extensión separable que es cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$ y sea $n = \mathrm{gr}(f)$. Probar que $[E : K] \mid n!$. Dar ejemplos de extensiones donde se cumpla la igualdad, y donde no se cumpla.

Ejercicio 6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Toda extensión de grado finito es normal.

ii) Toda extensión de grado finito tiene una clausura normal de grado finito.

iii) Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.

iv) Todo K-morfismo $f : L/K \to L/K$ es un K-automorfismo.

v) Si L/K es una extensión algebraica, todo K-morfismo $f : L/K \to L/K$ es un K-automorfismo.

vi) Toda extensión con grupo de Galois trivial es normal.

vii) Todo grupo de Galois es abeliano.

viii) El grupo de Galois de una extensión normal es cíclico.

Ejercicio 7. Sea K un cuerpo de característica $p \neq 0$.

i) Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f : K \to K$ definido por $f(x) = x^{p^n}$ es un $\mathbb{Z}_p$-morfismo de cuerpos.

ii) Probar que si K es un cuerpo finito de característica p, entonces el morfismo f definido en i) es un automorfismo. Dar ejemplos de K infinito con esta propiedad.

Ejercicio 8. Sea K el cuerpo de descomposición de $X^{p^n} - X$ sobre $\mathbb{Z}_p$. Probar que $[K : \mathbb{Z}_p] = n$.

Ejercicio 9. Caracterizar $G\,(L/\mathbb{Z}_2)$ para L tal que $[L : \mathbb{Z}_2] = 2\,,\, 3$.

Ejercicio 10. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_7$.

Ejercicio 11. Sea E/K un cuerpo de descomposición de $f \in K[X]$, $f \neq 0$, y sea F/K una subextensión de E/K. Probar que todo morfismo de F/K en E/K puede ser extendido a un automorfismo de E/K.

Ejercicio 12. Determinar cuáles de las siguientes extensiones E/K son normales. En cada caso calcular $G(E/K)$ y $\mathrm{Hom}(E/K, C/K)$, donde C es una clausura algebraica de K.

i) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}\,]/\mathbb{Q}$

ii) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}, \sqrt{5}\,]/\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}\,]$

iii) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,, \sqrt[3]{3}\,]/\,\mathbb{Q}$

iv) $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo

v) $\mathbb{Z}_3[a]/\mathbb{Z}_3$, con a raíz de $X^3 + X^2 + 2X + 1$

Ejercicio 13. Probar que $G\,(K(X)/K) \simeq \mathrm{PGL}(2,K)$, donde $\mathrm{PGL}(2,K)$ denota el grupo lineal proyectivo ($\mathrm{PGL}(2,K) \simeq GL(2,K)/(a.\,Id)$ con $a \neq 0$).

Ejercicio 14. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K. Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

Ejercicio 15.

i) Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}\,]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]/\mathbb{Q}$ son normales, pero $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}\,]/\mathbb{Q}$ no lo es. Calcular $G(\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}\,]/\mathbb{Q})$.

ii) Exhibir extensiones normales con subextensiones no normales.

Ejercicio 16. Sean E/K y F/K subextensiones normales de una extensión H/K. Probar que $E.\,F/K$ y $E \cap F/K$ son normales.

Ejercicio 17. Probar que toda extensión E/K generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que toda extensión de grado n sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

Ejercicio 18. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo, $p \neq 2$. Sea $K = \mathbb{Z}_p(u,v)$, donde $\{u,v\}$ es una familia algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Z}_p$ y sea α una raíz de $f = X^{2p} - uv\,X^p + v$ en una clausura algebraica C/K de K.

i) Probar que $K(\alpha)/K$ no es normal.

ii) Sea E/K un cuerpo de descomposición de f. Hallar $[E:K]$.

Ejercicio 19.

i) Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ se factoriza linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.

ii) Sea K un cuerpo infinito y sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ tiene una raíz en E. Probar que E es algebraicamente cerrado.

Ejercicio 20. Sea E/K una extensión de K y sea $G = G(E/K)$.

i) Sea H un subgrupo de G. Probar que ${}^{H}E = \{t \in E \,/\, f(t) = t \;\forall\, f \in H\}$ es una subextensión de E/K.

ii) Sea F/K una subextensión de E/K. Probar que $G_F = \{f \in G \,/\, f(t) = t \;\forall\, t \in F\}$ es un subgrupo de G.

iii) De acuerdo a i) y ii), podemos definir aplicaciones entre subextensiones de E/K y subgrupos de $G(E/K)$. Construir explícitamente dichas aplicaciones para la extensión de cuerpos $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\,\xi_3]/\mathbb{Q}$. Notar que son biyectivas y que una es la inversa de la otra. ¿Qué relación guardan $(G:H)$ y $\left[{}^{H}E:K\right]$ en este caso?

iv) ¿Qué pasa en el caso de la extensión $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2},\,\sqrt[3]{3}\,]/\mathbb{Q}$?