

# ÁLGEBRA III

## Práctica 4 – Primer Cuatrimestre de 2007

### Elementos primitivos y teorema de Galois

**Ejercicio 1.** Hallar elementos primitivos de  $E/\mathbb{Q}$ , donde  $E$  es el cuerpo de descomposición del polinomio:

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| i) $X^3 - 2$             | iii) $X^4 - 2$           |
| ii) $(X^2 - 3)(X^2 - 2)$ | iv) $(X^4 + 1)(X^2 + 5)$ |

**Ejercicio 2.** Hallar un elemento primitivo de  $E/\mathbb{Z}_2$ , donde  $E$  es un cuerpo de 8 elementos.

**Ejercicio 3.** Sea  $K$  un cuerpo de característica  $p > 0$  y sea  $\{u, v\}$  una familia algebraicamente independiente sobre  $K$ . Sean  $E = K(u, v)$  y  $F = K(u^p, v^p)$ . Probar que  $[E : F] = p^2$  y que  $E/F$  no admite un elemento primitivo.

**Ejercicio 4.** Sea  $C$  una clausura algebraica de  $\mathbb{Z}_p$  y sea  $q$  un primo distinto de  $p$ . Sea  $L$  la unión de todos los subcuerpos  $K$  de  $C$  tales que  $[K : \mathbb{Z}_p] = q^i$  para algún  $i \in \mathbb{N}$ . Probar que  $[L : \mathbb{Z}_p] = \infty$  y que toda subextensión propia de  $L/\mathbb{Z}_p$  es monógena.

**Ejercicio 5.** Sea  $E = \mathbb{C}(X)$ . Consideremos los automorfismos  $f$  y  $g$  de  $E$  definidos por  $g(X) = X^{-1}$  y  $f(X) = wX$ , donde  $w$  es una raíz  $n$ -ésima primitiva de 1. Probar que:

- i)  $f^n = g^2 = id_E$  y  $fg = gf^{-1}$ .
- ii) El subgrupo  $G$  generado por  $f$  y  $g$  es isomorfo a  $D_n$ .
- iii)  ${}^G E = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $K$  un cuerpo de  $q$  elementos y sea  $E = K(X)$ . Probar que:

- i)  $|G(E/K)| = q^3 - q$
- ii)  $G(E/K)$  está generado por los automorfismos  $f_a, g_b$  y  $h$  definidos por

$$f_a(X) = aX, \quad a \in K - \{0\}; \quad g_b(X) = X + b, \quad b \in K; \quad h(X) = X^{-1}.$$

- iii)  ${}^{G(E/K)} E = K(Y)$ , donde  $Y = \frac{(X^{q^2} - X)^{q+1}}{(X^q - X)^{q^2+1}}$ .

**Ejercicio 7.** Sean  $E/K$  y  $L/K$  dos extensiones finitas. Probar que si  $E/K$  y  $L/K$  son isomorfas entonces  $G(E/K) \simeq G(L/K)$ . ¿Vale la recíproca?

**Ejercicio 8.** Caracterizar los grupos de Galois de cada uno de los cuerpos de descomposición hallados en el Ejercicio 2 de la Práctica 3.

**Ejercicio 9.** Sea  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ .

- i) Calcular  $[E : \mathbb{Q}]$ . ¿Es  $E/\mathbb{Q}$  una extensión normal?
- ii) Caracterizar  $G(E/\mathbb{Q})$  y las subextensiones de grado 2 de  $E/\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 10.** Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio  $(X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 5)$  sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 11.** Determinar todas las subextensiones de grado 2 del cuerpo de descomposición del polinomio  $X^4 - 2X^2 - 1$  sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 12.** Sea  $K$  un cuerpo de característica distinta de 2 y sean  $\alpha, \beta \in K$  tales que  $\alpha, \beta$  y  $\alpha\beta$  no son cuadrados en  $K$ . Si  $a^2 = \alpha$  y  $b^2 = \beta$ , caracterizar  $G(K[a, b]/K)$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $K$  un cuerpo de característica distinta de 2.

- i) Sea  $E/K$  una extensión galoisiana tal que  $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Probar que  $E = K[a, b]$  con  $a^2, b^2 \in K$ .
- ii) Generalizar el resultado del ítem i) para  $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$  ( $n$  sumandos).

**Ejercicio 14.** Sea  $\xi_n$  una raíz primitiva  $n$ -ésima de la unidad y sea  $c_n = f(\xi_n, \mathbb{Q})$ . Sea  $K/\mathbb{Q}$  una extensión tal que  $c_n$  es irreducible en  $K[X]$ . Probar que  $K(\xi_n)/K$  es una extensión galoisiana de grado  $\varphi(n)$  y que  $G(K(\xi_n)/K) \simeq \mathcal{U}_n$ .

**Ejercicio 15.**

- i) Probar que  $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{11})/\mathbb{Q}$  es la única subextensión de grado 5 de  $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$ .
- ii) Probar que  $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$  tiene una única subextensión de grado 2.

**Ejercicio 16.** Sea  $E/K$  una extensión galoisiana de grado 15. Probar que  $E/K$  tiene sólo dos subextensiones propias, calcular sus grados y ver que dichas subextensiones resultan galoisianas.

**Ejercicio 17.** Sea  $E/K$  una extensión galoisiana de grado 45. Probar que si  $F/K$  es una subextensión de grado 3 de  $E/K$ , entonces es galoisiana.

**Ejercicio 18.** Sea  $p \in \mathbb{N}$  primo y sea  $E/K$  una extensión galoisiana de grado  $p^n s$  con  $n \in \mathbb{N}$  y  $(p, s) = 1$ . Probar que:

- i)  $E/K$  tiene subextensiones de grado  $s$ , y dos de ellas son isomorfas.
- ii) Si  $p > s$  hay una única subextensión de grado  $s$  que, además, resulta galoisiana.

**Ejercicio 19.**

- i) Dada una extensión galoisiana  $E/K$ , probar que existe una única subextensión abeliana máxima (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas).
- ii) Determinarla en el caso en que  $E$  es el cuerpo de descomposición del polinomio  $X^4 - 2$  sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 20.**

- i) Sean  $E/K$  y  $F/K$  dos subextensiones de grado finito de una extensión  $L/K$ . Probar que  $E/K$  y  $F/K$  son abelianas (es decir, galoisianas con grupo de Galois abeliano) si y sólo si  $E.F/K$  es abeliana.
- ii) Exhibir dos subextensiones de grado finito  $E/\mathbb{Q}$  y  $F/\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$  tales que  $E.F/\mathbb{Q}$  sea galoisiana pero ni  $E/\mathbb{Q}$  ni  $F/\mathbb{Q}$  lo sean.

**Ejercicio 21.** Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  un polinomio irreducible de grado mayor o igual que 2 con la propiedad de tener exactamente una raíz real y sea  $E/\mathbb{Q}$  un cuerpo de descomposición de  $f$ . Probar que  $G(E/\mathbb{Q})$  no es abeliano.