Álgebra III

Práctica 7 – Primer Cuatrimestre de 2007

Separabilidad y cuerpos perfectos – Norma y traza

Ejercicio 1.

i) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea t un elemento trascendente sobre $\mathbb{Z}_p$. Probar que $X^p - t$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p(t)[X]$.

ii) Sea K un cuerpo de característica $p > 0$, y sean $a \in K - K^p$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Probar que $X^{p^n} - a$ es irreducible en $K[X]$.

iii) Dar ejemplos de extensiones no separables.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo de característica $p > 2$ y sea $\{ u, v \}$ una familia algebraicamente independiente sobre K. Sea $f = X^{2p} + uvX^p + u \in K(u, v)[X]$ y sea α una raíz de f en una clausura algebraica de $K(u, v)$. Probar que:

i) $[K(u, v)(\alpha) : K(u, v)] = 2p$.

ii) $K(u, v)(\alpha)/K(u, v)$ no es separable ni puramente inseparable.

Ejercicio 3. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Probar que $f(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$, donde $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha^{p^j} \in K\}$.

Ejercicio 4. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sean $E_s = \{x \in E : x \text{ es separable sobre } K\}$ y $E_i = \{x \in E : x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$. Probar que:

i) E_s y E_i son subcuerpos de E.

ii) E es puramente inseparable sobre E_s.

iii) $E_s \cap E_i = K$.

iv) Si E/K es normal, entonces E es separable sobre E_i.

Ejercicio 5. Sea $\{u, v\}$ una familia algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Z}_p$. Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de las extensiones siguientes:

i) $\mathbb{Z}_p(u, v)/\mathbb{Z}_p(u^p - u, v^p - v)$.

ii) $\mathbb{Z}_p(u, v)/\mathbb{Z}_p(u^p, v^p - v - u)$.

Ejercicio 6. Sea $K = \mathbb{Z}_p(t)$, donde $p \in \mathbb{N}$ es primo y t es trascendente sobre $\mathbb{Z}_p$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y sea α una raíz de $X^{p^n} - t\,X^r + t \in K[X]$ en una clausura algebraica de K. Probar que el grado de inseparabilidad de $K(\alpha)/K$ es p^m con $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid r\}$.

Ejercicio 7. Sea $K = \mathbb{Z}_p(t)$, donde $p \in \mathbb{N}$ es primo, $p \neq 2$, y t es trascendente sobre $\mathbb{Z}_p$. Sea α una raíz de $X^{p^3} - tX^p + t \in K[X]$ en una clausura algebraica de K. Sea L la clausura normal de la clausura separable de $K(\alpha)/K$. Hallar $[L : K]$.

Ejercicio 8. Sea K un cuerpo de característica p y sea C una clausura algebraica de K. Se define $K^{p^{-\infty}} = \{x \in C : \sigma(x) = x \;\forall\, \sigma \in G(C/K)\}$.

i) Probar que:

(a) Si $p = 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = K$.

(b) Si $p > 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = \{x \in C : x^{p^n} \in K$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Probar que la construcción de $K^{p^{-\infty}}$ no depende de la clausura algebraica elegida.

Ejercicio 9. Un cuerpo K de característica p se dice *perfecto* si $K^{p^{-\infty}} = K$.

i) Probar que todo cuerpo de característica 0 es perfecto.

ii) Sea K un cuerpo de característica $p > 0$. Probar que K es perfecto si y sólo el morfismo $f : K \to K$ definido por $f(x) = x^p$ es un automorfismo.

iii) Deducir que todo cuerpo finito es perfecto.

iv) Probar que si K no es perfecto, entonces $[K^{p^{-\infty}} : K] = \infty$.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo de característica p y sea C una clausura algebraica de K. Probar que:

i) $K^{p^{-\infty}}$ es perfecto y $C/K^{p^{-\infty}}$ es de Galois.

ii) K es perfecto si y sólo si toda extensión algebraica de K es separable.

Ejercicio 11. Probar que si $\mathrm{car}(K) = p > 0$, entonces $K(X)$ no es perfecto.

Ejercicio 12. Sea K un cuerpo y sea E/K una extensión algebraica.

i) Probar que si K es perfecto, entonces E es perfecto.

ii) Probar que si E es perfecto y E/K es separable, entonces K es perfecto.

iii) Probar que si $[E : K] < \infty$ y E es perfecto, entonces E/K es separable.

Ejercicio 13.

i) Calcular la norma y la traza de $\sqrt[3]{2}$ en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\,]/\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \xi_3\,]/\mathbb{Q}$.

ii) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular la norma y la traza de ξ_p en $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$.

iii) Sea d un entero libre de cuadrados y sea $a \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,] - \mathbb{Q}$.
Probar que $f(a, \mathbb{Q}) = X^2 - \operatorname{Tr}(a)\,X + N(a)$.

Ejercicio 14. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea X trascendente sobre K. Calcular la norma y la traza de X en $K(X)/K(X^p)$.

Ejercicio 15. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo mayor que 3 y sea $\{u, v\}$ una familia algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Z}_p$. Sean $K = \mathbb{Z}_p(u^3, v^2)$ y $E = \mathbb{Z}_p(u, v)$. Calcular la norma y la traza de $u + v$ en E/K.

Ejercicio 16. Sea E/K una extensión finita. Probar que:

i) E/K es separable si y sólo si $\operatorname{Tr} : E \to K$ es una aplicación no nula.

ii) Si E/K es separable, entonces $\operatorname{Tr} : E \to K$ es suryectiva.

iii) La aplicación $\operatorname{Tr} : E \times E \to K$ definida por $\operatorname{Tr}(a, b) = \operatorname{Tr}(a.b)$ es una forma bilineal simétrica.

iv) Para cada $a \in E$ se define $\operatorname{Tr}_a : E \to K$ como $\operatorname{Tr}_a(b) = \operatorname{Tr}(a.b)$.

   (a) Verificar que $\operatorname{Tr}_a \in E^*$ para cada $a \in E$.

   (b) Probar que si E/K es separable, la aplicación $a \mapsto \operatorname{Tr}_a$ es un isomorfismo entre E y E^*.

Ejercicio 17. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión de grado q, con q un primo distinto de p. Probar que existe $\alpha \in E$ tal que $E = K[\alpha]$ y el coeficiente de grado $q - 1$ de $f(\alpha, K)$ es nulo.

Ejercicio 18.

i) Calcular núcleo e imagen del morfismo de grupos de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{R}^*$ inducido por la aplicación $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

ii) Probar que en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]/\mathbb{Q}$ la norma no es inyectiva ni suryectiva.

Ejercicio 19. Sea K un cuerpo finito y sea L/K una extensión finita. Probar que la norma y la traza en L/K son suryectivas.

Ejercicio 20. Sea u trascendente sobre $\mathbb{Z}_7$ y sean $K = \mathbb{Z}_7(u^7 - u)$ y $E = \mathbb{Z}_7(u)$.

i) Hallar una base del núcleo de la transformación lineal $\operatorname{Tr}_{E/K} : E \to K$.

ii) Encontrar una base de E como K-espacio vectorial formada por elementos de traza 1.

Ejercicio 21. Sea K un cuerpo de característica p y sea E/K una extensión de grado n tal que n es coprimo con p. Sea $x \in E$. Probar que si $\operatorname{Tr}(x^i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $x = 0$.