Álgebra III

Práctica 8 – Primer Cuatrimestre de 2007

Ejercicio 1. Sean K un cuerpo, C/K una clausura algebraica de K y $f \in K[X]$ un polinomio mónico de grado $n \geq 1$. Si $f = (X - a_1) \dots (X - a_n)$ (con $a_i \in C$) se define el discriminante de f en la forma:

$$\Delta(f) = \prod_{i<j} (a_i - a_j)^2$$

i) Probar que:

a) Si $f = X^2 + bX + c$, entonces $\Delta(f) = b^2 - 4c$.

b) Si $f = X^3 + bX + c$, entonces $\Delta(f) = -4b^3 - 27c^2$.

ii) Sea $E/\mathbb{Q}$ una extensión de grado n de $\mathbb{Q}$. Sea a tal que $E = \mathbb{Q}(a)$ y sea $f = f(a, \mathbb{Q})$. Probar que $\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N_{E/\mathbb{Q}}(f'(a))$, donde f' es el polinomio derivado de f.

Ejercicio 2. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si $f = X^n + bX + c \in \mathbb{Q}[X]$, entonces $\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n^n c^{n-1} + (1-n)^{n-1} b^n)$.

Ejercicio 3. Sea $E/\mathbb{Q}$ un cuerpo de descomposición de $X^3 + X + 1$. Probar que el polinomio $X^4 - 6X^2 + 40$ es reducible en $E[X]$.

Ejercicio 4. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo, $p \neq 2$. Determinar la única subextensión cuadrática de $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 5.

i) Demostrar que toda extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$ está contenida en una extensión ciclotómica.

ii) En cada uno de los siguientes casos, exhibir una extensión ciclotómica $E/\mathbb{Q}$ tal que $F \subseteq E$:

a) $F = \mathbb{Q}[\sqrt{6}\,]$

b) $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{7}\,]$

c) $F = \mathbb{Q}[\sqrt{-21}\,]$

d) $F/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $X^{10} + 3X^8 - X^2 - 3$

Ejercicio 6. Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo y sea E un cuerpo de descomposición del polinomio $f = X^5 + p\,X^3 + p$ sobre $\mathbb{Q}$. Probar que $G(E, \mathbb{Q})$ contiene subgrupos de orden 2 no invariantes.

Ejercicio 7. Sean $E = K(t_1, t_2, t_3, t_4)$ y $F = K(s_1, s_2, s_3, s_4)$, donde $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ es una familia algebraicamente independiente sobre K y $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ es el conjunto de polinomios simétricos elementales en t_1, t_2, t_3, t_4.

i) Probar que $F(t_1 + t_2)/F$ es una subextensión no normal de E/F y calcular su grado.

ii) Sean i, j tales que $1 \leq i < j \leq 4$. Probar que $t_i + t_j \in F(t_1 + t_2)$ si y sólo si $i = 1$, $j = 2$ o $i = 3$, $j = 4$.

iii) Caracterizar $G(F(t_1 + t_2)/F)$.

Ejercicio 8. Sea $\{t_1, \dots, t_n\}$ una familia algebraicamente independiente sobre un cuerpo K y sea $\{s_1, \dots, s_n\}$ el conjunto de los polinomios simétricos elementales en $\{t_1, \dots, t_n\}$.

i) Caracterizar las subextensiones de grado 2 de $K(t_1, \dots, t_n)/K(s_1, \dots, s_n)$.

ii) Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Probar que $t_1^{a_1} + t_2^{a_2} + \cdots + t_n^{a_n}$ genera $K(t_1, \dots, t_n)/K(s_1, \dots, s_n)$ si y sólo si $a_i \neq a_j \ \forall\, i \neq j$.

Ejercicio 9. Probar que:

i) Todo grupo abeliano es resoluble.

ii) Todo p-grupo es resoluble.

iii) D_n es resoluble.

iv) S_n es resoluble si y sólo si $n \leq 4$.

Ejercicio 10. Mostrar explícitamente que las siguientes extensiones son radicales:

i) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}},\, i+\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q}$

ii) $E/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $f = (X^4 - 2)(X^2 - 5)$.

iii) $K(t_1, t_2)/K(s_1, s_2)$, donde K es un cuerpo de característica 0, $\{t_1, t_2\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K y $\{s_1, s_2\}$ los polinomios simétricos elementales.

Ejercicio 11. Sea K un cuerpo. Sea $f \in K[X]$ un polinomio de grado n y sea E un cuerpo de descomposición de f sobre K. Probar que si $G(E, K) \simeq S_n$, entonces f es irreducible en $K[X]$.

Ejercicio 12.

i) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Sea $H \subset S_p$ un subgrupo que contiene una transposición y una permutación de orden p. Probar que $H = S_p$.

ii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado p primo, y sea $E \subset \mathbb{C}$ cuerpo de descomposición de f. Probar que si f tiene exactamente dos raíces no reales en $\mathbb{C}$, entonces $G(E/\mathbb{Q}) \simeq S_p$.

Ejercicio 13.

i) Sea $m \in \mathbb{N}$ par, y sean $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ enteros positivos pares, con $r > 1$ impar. Sea $f = (X^2 + m)(X - a_1) \dots (X - a_r) - 2$. Probar que:

(a) f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Para m suficientemente grande, f tiene exactamente dos raíces no reales en $\mathbb{C}$.

ii) Deducir que para cada primo $p \in \mathbb{N}$, existe una extensión galoisiana $E/\mathbb{Q}$ con grupo de Galois S_p.

Ejercicio 14. (Difícil)

i) Probar que el resultado del ejercicio anterior, ítem i) (b), sigue siendo válido si se suprime la hipótesis *"m suficientemente grande"*.

ii) Deducir que $f = X^5 - 12X^4 + 46X^3 - 72X^2 + 88X - 98 \in \mathbb{Q}[X]$ no es resoluble por radicales.