

ÁLGEBRA III

Práctica 5 – Segundo Cuatrimestre de 2008

Cuerpos finitos y extensiones ciclotómicas

Ejercicio 1. Sea K un cuerpo. Notemos $(K, +)$ al grupo aditivo de K y $(K^*, \cdot)$ al grupo multiplicativo. Probar que $(K, +)$ y $(K^*, \cdot)$ nunca son isomorfos como grupos. Caracterizar ambos grupos en el caso en que K sea finito.

Ejercicio 2. Probar que dos cuerpos finitos de igual cardinal son isomorfos.

Ejercicio 3. Sea C una clausura algebraica de $\mathbb{Z}_p$ y sean $\mathbb{F}_{p^m}$ y $\mathbb{F}_{p^n}$ los cuerpos de p^m y p^n elementos incluidos en C . Probar que $\mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^n}$ si y sólo si $m \mid n$.

Ejercicio 4. Sea K un cuerpo de q elementos y sea E/K una extensión finita de K . Probar que E/K es cíclica con $G(E/K) = \langle \sigma \rangle$, donde $\sigma : E \rightarrow E$ es el morfismo definido por $\sigma(x) = x^q$.

Ejercicio 5. Sea K un cuerpo finito de q elementos.

- i) Sea $f \in K[X]$ irreducible. Probar que f divide a $X^{q^n} - X$ si y sólo si $\text{gr}(f)$ divide a n .
- ii) Probar que $X^{q^n} - X = \prod_{d|n} (\prod f_d)$, donde el producto de adentro recorre todos los polinomios irreducibles mónicos de grado d en $K[X]$.
- iii) Deducir que $q^n = \sum_{d|n} d \cdot u(d)$, donde $u(d)$ es la cantidad de polinomios irreducibles mónicos de grado d en $K[X]$.
- iv) Dar una fórmula para $u(d)$.
- v) Calcular la cantidad de polinomios de grado 3 y 4 mónicos e irreducibles que hay en un cuerpo de 2^{12} y en un cuerpo de 3^{12} elementos.

Ejercicio 6. Sea $n \in \mathbb{N}$ impar y sea K un cuerpo con $\text{car}(K) \neq 2$. Probar que K contiene una raíz n -ésima primitiva de 1 si y sólo si K contiene una raíz $2n$ -ésima primitiva de 1.

Ejercicio 7. Hallar todos los $m \in \mathbb{N}$ para los cuales una raíz m -ésima primitiva de 1 tiene grado 2 o 4 sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 8.

- i) Sea $E/\mathbb{Q}$ una extensión de grado finito. Probar que existe sólo un número finito de raíces de la unidad en E .
- ii) Determinar todas las raíces de la unidad contenidas en cada uno de los siguientes cuerpos: $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{-3}]$ y $\mathbb{Q}(\xi_9)$.

Ejercicio 9. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $c_n \in \mathbb{Q}[X]$ el polinomio ciclotómico de orden n . Probar que:

- i) Si $p \in \mathbb{N}$ es primo, entonces $c_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + 1$.
- ii) Para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada primo $p \in \mathbb{N}$, $c_{p^r}(X) = c_p(X^{p^{r-1}})$.
- iii) Si $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$ con $p_1, \dots, p_s$ primos distintos, $c_n(X) = c_{p_1 \dots p_s}(X^{p_1^{r_1-1} \dots p_s^{r_s-1}})$.
- iv) Si n es impar, $c_{2n}(X) = c_n(-X)$.
- v) Si p es primo, $p \nmid n$, entonces $c_{pn}(X) = \frac{c_n(X^p)}{c_n(X)}$.

Ejercicio 10. Sean E/K y F/K extensiones ciclotómicas de índices m y n respectivamente, con $(m : n) = 1$, contenidas en una clausura algebraica C de K . Probar que:

- i) EF/K es una extensión ciclotómica de índice mn .
- ii) Si $K = \mathbb{Q}$, entonces $E \cap F = \mathbb{Q}$.

Ejercicio 11.

- i) Sea $E/\mathbb{Q}$ una extensión cuadrática. Probar que c_n es reducible en $E[X]$ si y sólo si $E \subset \mathbb{Q}(\xi_n)$.
- ii) Determinar todas las extensiones cuadráticas $E/\mathbb{Q}$ tales que c_{12} es irreducible en $E[X]$. Idem para c_8 y c_{10} .

Ejercicio 12. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que c_n es irreducible sobre $\mathbb{Q}(\xi_9)$.

Ejercicio 13. Sea K un cuerpo, sea $\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow K$ el único morfismo de anillos con unidad y sea $\bar{\Phi} : \mathbb{Z}[X] \rightarrow K[X]$ el morfismo de anillos inducido por Φ definido como $\bar{\Phi}(\sum a_i X^i) = \sum \Phi(a_i) X^i$. Como $c_n \in \mathbb{Z}[X]$, podemos pensar a c_n en $K[X]$ vía $\bar{\Phi}$.

- i) Probar que:
 - a) $c_n \in K[X]$ es mónico de grado $\varphi(n)$.
 - b) $X^n - 1 = \prod_{d|n} c_d$ en $K[X]$.
 - c) Si $\text{car}(K) \neq 0$ y n es coprimo con $\text{car}(K)$, entonces c_n tiene todas sus raíces simples.
- ii) Sea C/K una clausura algebraica y sea $\xi \in C$ una raíz n -ésima primitiva de 1 (i.e. $\xi^n = 1$ y $\xi^r \neq 1 \forall r < n$). Probar que, si $\text{car}(K) \nmid n$:
 - a) $\xi \in C$ es raíz de c_n si y sólo si ξ es raíz n -ésima primitiva de 1.
 - b) La cantidad de raíces n -ésimas primitivas de 1 en C es $\varphi(n)$.
 - c) Si ξ_n es una raíz n -ésima primitiva de 1 en C , entonces $\xi \in C$ es otra raíz n -ésima primitiva de 1 si y sólo si $\xi = \xi_n^j$ para algún $1 \leq j \leq n$ tal que $(j : n) = 1$.

Ejercicio 14. Sea K un cuerpo y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{car}(K) \nmid n$. Probar que c_n se factoriza en $K[X]$ como producto de polinomios irreducibles de grado $[K(\xi_n) : K]$, donde ξ_n es una raíz n -ésima primitiva de 1.

Ejercicio 15. Sea K un cuerpo finito de q elementos, y sea E/K una extensión ciclotómica de índice n , con n coprimo con $\text{car}(K)$. Probar que:

- i) E es un cuerpo de q^m elementos, donde m es el menor número natural tal que $n \mid q^m - 1$.
- ii) Deducir que c_n es irreducible en $K[X]$ si y sólo si la clase de q en $\mathcal{U}_n$ tiene orden $\varphi(n)$.

Ejercicio 16. Probar que:

- i) Si p es un primo, $p \neq 2, 3$, entonces c_{12} es reducible en $\mathbb{Z}_p[X]$.
- ii) El polinomio $X^4 + 1$ es reducible en $\mathbb{Z}_p[X]$ para todo primo p .

Ejercicio 17. Probar que:

- i) $\mathbb{Z}_3$ no contiene raíces 13-ésimas de la unidad distintas de 1.
- ii) Si $E/\mathbb{Z}_3$ es una extensión ciclotómica de índice 13, entonces $[E : \mathbb{Z}_3] = 3 < \varphi(13)$.

Ejercicio 18.

- i) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que c_n es irreducible sobre un cuerpo de 9 elementos.
- ii) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Hallar todos los $m \in \mathbb{N}$ tales que c_6 es irreducible sobre un cuerpo de p^m elementos.

Ejercicio 19.

- i) Sea K un cuerpo de 27 elementos. Factorizar c_7 como producto de polinomios irreducibles en $K[X]$.
- ii) Sea t trascendente sobre $\mathbb{Z}_7$ y sea $K = \mathbb{Z}_7(t)$. Factorizar c_9 como producto de polinomios irreducibles en $K[X]$.