Práctica 1

Nota: En esta práctica anillo significa anillo conmutativo con unidad $1 \neq 0$.

1. Sea A un anillo. Probar que:

   (a) A tiene ideales maximales y todo ideal propio I está contenido en un ideal maximal.

   (b) $\mathcal{P}$ es un ideal primo si, y sólo si, $A/\mathcal{P}$ es dominio íntegro

   (c) A es un cuerpo si, y sólo si, tiene exactamente dos ideales.

   (d) $\mathcal{M}$ es un ideal maximal si, y sólo si, $A/\mathcal{M}$ es un cuerpo.

2. Probar que:

   (a) Si K es un cuerpo y $f : K \to B$ es un morfismo de anillos, entonces f es inyectivo.

   (b) Si A es un anillo tal que todo morfismo de anillos $f : A \to B$ es inyectivo, entonces A es un cuerpo.

3. Si D es un dominio íntegro finito, entonces es un cuerpo.

4. Sea $b \in \mathbb{C}$ y sea $\mathbb{Q}[b] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i b^i \;\; a_i \in \mathbb{Q},\, n \in \mathbb{N}_0\}$.
   Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ son cuerpos.

5. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X]$.

   (a) Probar que (f) es un ideal maximal si, y sólo si, f es irreducible. Deducir que $K[X]/(f)$ es un cuerpo si y sólo si f es irreducible.

   (b) Sea f irreducible y sea $K_f = \{\sum_{i<\mathrm{gr}\, f} \; a_i x^i,\; a_i \in K\}$. Probar que a K_f se le puede dar una estructura de cuerpo, que depende de f y que, con esa estructura, es isomorfo a $K[X]/(f)$.

   (c) Construir un cuerpo de 9 elementos.

   (d) Probar que $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$.

   (e) Si $f(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ con $\alpha_i \in K$ todos distintos, se define $g_i := \prod_{i \neq j}(X - \alpha_j)$; $1 \leq i \leq n$. Probar que $\{\bar{g_1}, \ldots, \bar{g_n}\}$ es una base de $K[X]/(f)$ como K-espacio vectorial y, si $h \in K[X]$, determinar las coordenadas en esta base de $\bar{h} \in K[X]/(f)$.

6. Caracterizar los siguientes conjuntos:

   (a) $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\; f \text{ morfismo de cuerpos }\}$.

   (b) $\{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{F}_p,\; f \text{ morfismo de cuerpos }\}$.

   (c) $\{f : \mathbb{Q} \to K,\; f \text{ morfismo de cuerpos }\}$, K un cuerpo.

(d) $\{f : \mathbb{Q}(i) \to \mathbb{Q}(i),\ f$ morfismo de cuerpos $\}$.

(e) $\{f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{3}),\ f$ morfismo de cuerpos $\}$.

(f) $\{f : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),\ f$ morfismo de cuerpos $\}$.

(g) $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f$ morfismo de cuerpos tal que $f(a) = a,\ \forall a \in \mathbb{R}\ \}$.

(h) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f$ morfismo de cuerpos $\}$.

7. Sea D un dominio íntegro y sea K su cuerpo de cocientes. Probar que $f : D \to K$ definida por $f(a) = \frac{a}{1}$ es monomorfismo de anillos.

   Deducir la equivalencia de las siguientes afirmaciones para un anillo A:

   (a) A es un dominio íntegro.

   (b) Existe $f : A \to K$ monomorfismo de anillos para algún cuerpo K.

8. Caracterizar el cuerpo de cocientes de los siguientes dominios de integridad:

   $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}[i]$; $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$; $A[X]$ (A dominio íntegro); K (K cuerpo).

9. Sea p un número primo, y sea $\Phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{F}_p[X]$ definida por:

$$\Phi(a_n X^n + \cdots + a_0) = \bar{a_n} X^n + \cdots + \bar{a_0}$$

   donde $\bar{a_i}$ es el resto de a_i módulo p.

   (a) Probar que Φ es un morfismo de anillos.

   (b) Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ $\Phi(f) \neq 0$ y $\operatorname{gr} \Phi(f) = \operatorname{gr} f$. Probar que si $\Phi(f)$ es irreducible en $\mathbb{F}_p[X]$, entonces f no se factoriza en $\mathbb{Z}[X]$ como producto de polinomios de grado positivo.

10. *Teorema de Gauss.*

    Sea A un DFU y sea K su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad \in A[X]$ con $a_n a_0 \neq 0$. Demostrar que si $\frac{p}{q}$ es raíz de f con $p, q \in A$ coprimos, entonces $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$.

11. Sea A un DFU y sea K su cuerpo de cocientes. Si $f \in A[X]$ es mónico, entonces todo factor mónico de f en $K[X]$, está en $A[X]$.

12. *Criterio de Irreducibilidad de Eisenstein.*

    Sea A un DFU y sea K su cuerpo de cocientes. Sea $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in A[X]$ con $n > 0$. Probar que si existe un primo $p \in A$ que verifica que $p \nmid a_n$, $p \mid a_i \quad (0 \leq i \leq n-1)$ y $p^2 \nmid a_0$, entonces f es irreducible en $K[X]$.

13. Sea ψ un endomorfismo de $K[X]$ y sea $f \in K[X]$.

    (a) Si ψ es un automorfismo, entonces f es irreducible si, y sólo si, $\psi(f)$ lo es.

    (b) Si $\psi_{|K} = \mathrm{id}_K$, entonces $\psi(f)(X) = f(\psi(X))$.

    (c) En la situación de (b), ψ es un automorfismo si, y sólo si, $\psi(X) = aX + b$, con $a, b \in K$, $a \neq 0$.

14. Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo. Probar que:

    (a) $(X+1)^p - 1$ es divisible por X y $\dfrac{(X+1)^p - 1}{X} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^{p-1-k}$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

    (b) $1 + X + X^2 + \ldots + X^{p-1}$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

    (c) $X^n - p$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X] \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

15. Mostrar que $X^4 - X^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ y factorizar $X^5 + X^4 + X^2 + X + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$.

16. Analizar la reducibilidad de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$

    (a) $X^5 + 9X^3 + 15X^2 - 12$

    (b) $X^5 + 6X^4 + 5X^2 - 2X + 9$

    (c) $X^4 + X^3 + 1$, $X^5 + X^3 + 1$

17. Sea K un cuerpo. Sea $f \in K[X]$ y sea a una raíz de f en K. Probar que:

    (a) a es raíz múltiple de f si, y sólo si, es raíz de su derivado.

    (b) Si K es de característica cero, entonces $\frac{f}{(f,f')} \in K[X]$ tiene las mismas raíces que f, pero son todas simples.

    (c) Si $f \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible, entonces no tiene raíces múltiples en $\mathbb{C}$.

18. Probar que $\sum_{i=0}^{n} X^i$ y $\sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$ no tienen raíces múltiples en $\mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

19. Determinar todos los polinomios irreducibles en $\mathbb{Z}_2[X]$ de grado menor o igual que 5.

20. Sea K un cuerpo finito de q elementos. ¿cuántos polinomios irreducibles mónicos de grado 2 hay en $K[X]$? ¿Y de grado 3?

21. Sea $f = aX^2 + bX + c = a(X-\alpha)(X-\beta) \in \mathbb{C}[X]$ con $a \neq 0$.

    Verificar que el *Discriminante* $\Delta := b^2 - 4ac$ también es igual a $a^2(\alpha-\beta)^2$ y reencontrar "f tiene una raíz doble $\Leftrightarrow \Delta = 0$".

22. Sea $f = X^3 + pX + q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \in \mathbb{C}[X]$.

    Se define el *Discriminante* de f como $\Delta(f) = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$. Se verifica que $\Delta(f) = 0 \Leftrightarrow f$ tiene una raíz múltiple.

    Verificar que $\Delta(f) = -4p^3 - 27q^2$. (Observar que $\Delta(f)$ es simétrico en las raíces y, por lo tanto, es un polinomio en los coeficientes de f).

    Nota: Sea $f = a_nX^n + \cdots + a_0 = a_n(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n) \in \mathbb{C}[X]$, con $a_n \neq 0, n \geq 2$.

    Se define el *Discriminante* de f como:

$$\Delta(f) := a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$