Práctica 2

Nota: $m(\alpha, K)$ denota el polinomio minimal de α sobre el cuerpo K y ξ_n denota una raíz $n-$ésima primitiva de la unidad.

1. Sean E/K una extensión y $\alpha \in E$ algebraico sobre K. Dada F/K una subextensión de E/K, probar que $m(\alpha, F) \mid m(\alpha, K)$. Dar ejemplos con $m(\alpha, F) = m(\alpha, K)$ y con $m(\alpha, F) \neq m(\alpha, K)$.

2. Calcular los siguientes polinomios minimales:

   (a) $m(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q})$ (b) $m(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ (c) $m(\omega, \mathbb{R})$ con $\omega \in \mathbb{C}$

   (d) $m(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q})$ (e) $m(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q}(i))$ (f) $m(\sqrt{2-\sqrt{3}}, \mathbb{Q})$

3. Calcular:

   (a) $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$ (b) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}]$ (c) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}) : \mathbb{Q}]$

4. (a) Calcular $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ y $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$. Deducir que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
   (b) Hallar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$. Calcular $m(\alpha, \mathbb{Q})$.

5. Probar que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$. Calcular $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) : \mathbb{Q}\right]$.

6. Sea K un cuerpo y sea $E = K(a)$ una extensión finita de K. Para cada $\alpha \in E$ definimos $L_\alpha : E \to E$ como la K-transformación lineal dada por $L_\alpha(x) = \alpha x$.

   (a) Probar que $m(a, K) = \chi_{L_a} = \det(XI - L_a)$.
   (b) ¿ Para cuáles $\alpha \in E$ vale que $m(\alpha, K) = \chi_{L_\alpha}$?

7. Sea E/K una extensión. Probar que E/K es algebraica si, y sólo si, todo anillo A tal que $K \subset A \subset E$, es un cuerpo.

8. Sean L/K y M/K dos subextensiones de grado finito de una extensión F/K.

   (a) Si $\mathrm{mcd}([L : K], [M : K]) = 1$, entonces $[L \cdot M : K] = [L : K] \cdot [M : K]$.
   (b) Probar que si $[L \cdot M : K] = [L : K] \cdot [M : K]$ entonces $L \cap M = K$. ¿Vale la recíproca?

9. Mostrar que el polinomio $X^5 + 6X^3 + 15X^2 + 3$ es irreducible en $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})[X]$.

10. (a) Sea F/K una extensión de grado impar. Probar que si $F = K(u)$ entonces $F = K(u^2)$.
    (b) Si $[E : K]$ es primo, entonces E/K no tiene cuerpos intermedios.
    (c) Sea $n \in \mathbb{N}$, $(n, 6) = 1$. Sea $F/\mathbb{Q}$ una subextensión de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ de grado n.
    Probar que $[F(\sqrt[3]{2}, i) : F] = 6$.

11. (a) Caracterizar las extensiones cuadráticas de un cuerpo K de característica $\neq 2$.
    (b) Sea $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ y sea a una raíz de f en una clausura algebraica de $\mathbb{F}_2$. Probar que no existe b en $\mathbb{F}_2(a)$ tal que $m(b, \mathbb{F}_2) = X^2 + c$ para algún c en $\mathbb{F}_2$. Caracterizar las extensiones cuadráticas de un cuerpo de característica 2.

12. Sea a_b una raíz del polinomio $X^2 + bX + b^2$ ($b \in \mathbb{Q}$). Describir las posibles extensiones $\mathbb{Q}(a_b)/\mathbb{Q}$ y determinar $[\mathbb{Q}(a_b) : \mathbb{Q}]$.

13. Sea $a \in \mathbb{C}$ una raíz de $X^3 - 2X + 2$ y sea $b = a^2 - a$. Probar que $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(b)$ y calcular $m(b, \mathbb{Q})$.

14. (a) Sea p un primo positivo. Calcular $m(\xi_p, \mathbb{Q})$. Deducir $[\mathbb{Q}(\xi_p) : \mathbb{Q}]$.
    (b) Calcular $m(\xi_6, \mathbb{Q})$
    (c) Probar que $m(\xi_n, \mathbb{Q}) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1}$ si y sólo si n es primo.

15. Probar que $m(\xi_5 + \xi_5^{-1}, \mathbb{Q}) = X^2 + X - 1$. Deducir que $\mathbb{Q}(\xi_5)$ admite una subextensión cuadrática y caracterizarla.

16. Sea p un primo positivo y $a \notin \mathbb{Q}^p$.
    (a) Probar que $m(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}) = X^p - a$.
    (b) Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $m(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q})$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$ y $[K : \mathbb{Q}(\sqrt[p]{a})]$.

17. Sea $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una numeración de los primos positivos.
    (a) Calcular $[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}]$. Calcular la cantidad de subextensiones de grado 2 que tiene esta extensión.
    (b) Usar (a) para calcular $[\mathbb{Q}(\sqrt{p_i})_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{Q}]$.
    (c) ¿ $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}(\sqrt{p_i})_{i \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$?
    (d) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado tal que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$ (¿Existe alguno $\neq \mathbb{C}$?). Calcular $[K : \mathbb{Q}]$.

18. Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Probar que existen subextensiones de grado finito arbitrariamente grande.

19. Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio $f \in K[X]$ se factoriza linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.

20. (a) Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.
    (b) Sea E/K una extensión algebraica. Calcular el cardinal de E en función del cardinal de K.
    (c) Probar que hay no numerables elementos trascendentes en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

21. (a) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \to \mathbb{C}$ y que en cada caso $f(\mathbb{Q}(\sqrt{d})) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (de hecho, vale la igualdad).
    (b) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cubos.

i. Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{d}) \to \mathbb{C}$ pero que, en general, $f(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})) \nsubseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$.

ii. Considerar $\mathbb{Q}(\xi_3, \sqrt[3]{d})$. ¿Qué pasa en este caso?

22. Sea K un cuerpo.

(a) Sea X una indeterminada. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $m(X, K(X^n))$. Deducir $[K(X) : K(X^n)]$.

(b) Sea $\{X_1, X_2, ..., X^n\}$ un conjunto de indeterminadas y sean $e_1, ..., e_n \in \mathbb{N}$. Calcular $[K(X_1, ..., X_n) : K(X_1^{e_1}, ..., X_n^{e_n})]$.

23. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X]$ no constante. Probar que $[K(X) : K(f)] = \operatorname{gr} f$.