Práctica 3

---

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

   (a) Todo polinomio no constante $f \in K[X]$ se factoriza linealmente en alguna extensión $E \mid K$.

   (b) El cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$ es único, salvo isomorfismos.

   (c) Toda extensión $E \mid K$ de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio $f \in K[X]$.

   (d) Sean $K \subseteq L \subseteq E$ cuerpos. Si E es un cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$, entonces E es también un cuerpo de descomposición de $f \in L[X]$.

2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

   (a) $X^3 - 10$ sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;

   (b) $X^4 - 5$ sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ y $\mathbb{Q}(i)$;

   (c) $\prod_{i=1}^{n}(X^2 - p_i)$ sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \ldots, p_n$ primos distintos;

   (d) $X^3 - 2$ sobre $\mathbb{F}_7$;

   (e) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$ sobre $\mathbb{F}_5$;

   (f) $X^p - a$ sobre $\mathbb{Q}$, con p primo y $a \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^p$;

3. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_7$.

4. Sea $E/\mathbb{Q}$ una extensión que es cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado n. Probar que $[E : \mathbb{Q}]/n!$. Dar ejemplos de extensiones donde se cumpla la igualdad y donde no se cumpla.

5. Sea $f = (X^2 + 1)(X^2 + X - 1) \in \mathbb{F}_3[X]$. Calcular un cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{F}_3$.

6. Sea $f = X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$. Sea $\overline{\mathbb{F}}_3/\mathbb{F}_3$ una clausura algebraica de $\mathbb{F}_3$ y $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_3$ una raíz de f. Probar que $\mathbb{F}_3(\alpha)/\mathbb{F}_3$ es normal.

7. Caracterizar los cuerpos de descomposición de $X^3 + 2X + 1$ y de $X^3 + X^2 + X + 2$ sobre $\mathbb{F}_3$. Probar que son isomorfos como extensiones de $\mathbb{F}_3$.

8. Calcular los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{F}_5$. ¿Son isomorfos entre ellos?

9. Sea K un cuerpo de característica $p \neq 0$

   (a) Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, la aplicación $f : K \to K$ definida por $f(x) = x^{p^n}$ es un $\mathbb{F}_p$-morfismo de cuerpos.

(b) Probar que si K es finito, entonces f es automorfismo.

10. Sea K el cuerpo de descomposición del polinomio $X^{p^n} - X$ sobre $\mathbb{F}_p$. Probar que $[K : \mathbb{F}_p] = n$

11. Probar que los cuerpos finitos no son algebraicamente cerrados.

12. Sea E/K un cuerpo de descomposición de $f \in K[X]$ no cte y sea F/K una subextensión de E/K. Probar que todo morfismo de F/K en E/K puede ser extendido a un automorfismo de E/K.

13. Determinar si las siguientes extensiones son normales. Calcular $\mathrm{Hom}(E/K, C/K)$ donde C es una clausura algebraica de K:

    (a) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})/\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$.

    (b) $\mathbb{Q}(\xi_p)/Q$, con $p \in \mathbb{N}$ primo.

    (c) $\mathbb{F}_3[a]/\mathbb{F}_3$ con a raíz de $X^3 + X + 2$.

14. Probar que $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ son normales, pero $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ no lo es.

15. Probar que toda extensión generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para qué valores de n se cumple que toda extensión de grado n sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

16. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t una indeterminada. Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

17. Sean E/K y F/K subextensiones normales de una extensión H/K. Probar que $E \cdot F/K$ y $E \cap F/K$ son normales.