

Práctica 4

1. Sea K un cuerpo. Probar que los grupos $(K, +)$ y (K^*, \cdot) nunca son isomorfos.
2. (a) Sea p primo y sea t una indeterminada. Probar que $X^p - t$ es irreducible en $\mathbb{F}_p(t)[X]$.
 (b) Sea K un cuerpo de característica $p > 0$. Si $a \in K - K^p$ y $n \in \mathbb{N}_0$, probar que $X^{p^n} - a$ es irreducible en $K[X]$.
 (c) Dar ejemplos de extensiones no separables.
3. Sea K un cuerpo de característica $p > 2$ y sean $\{u, v\}$ indeterminadas independientes sobre K . Sea $f = X^{2p} + uvX^p + u \in K(u, v)[X]$ y sea α una raíz de f en una clausura algebraica de $K(u, v)$. Probar que:
 - (a) $[K(u, v)(\alpha) : K(u, v)] = 2p$
 - (b) $K(u, v)(\alpha)/K(u, v)$ no es separable ni puramente inseparable.
4. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Probar que $m(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$, donde $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha^{p^j} \in K\}$.
5. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sean $E_s = \{x \in E : x \text{ es separable sobre } K\}$ y $E_i = \{x \in E : x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$. Probar que:
 - (a) E_s y E_i son subcuerpos de E .
 - (b) E es puramente inseparable sobre E_s .
 - (c) $E_s \cap E_i = K$.
 - (d) Si E/K es normal, entonces E es separable sobre E_i y $E = E_s E_i$.
6. Sean u, v indeterminadas y $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de las siguientes extensiones:
 - (a) $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p - u, v^p - v)$.
 - (b) $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p, v^p - v - u)$.
7. Sea $K = \mathbb{F}_p(t)$ con p primo y t una indeterminada. Sean C/K una clausura algebraica, $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y $\alpha \in C$ una raíz de $X^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$. Sea $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0/p^k | r\}$. Probar que $[K(\alpha) : K]_i = p^m$.
8. Sea $K = \mathbb{F}_p(t)$ con $p \neq 2$ primo y t una indeterminada. Sean C/K una clausura algebraica y $\alpha \in C$ una raíz de $X^{p^3} - tX^p + t \in K[X]$. Sea L la clausura normal de la clausura separable de $K(\alpha)/K$. Hallar $[L : K]$.
9. (a) Probar que todo cuerpo de característica cero es perfecto.

- (b) Sea K de característica $p > 0$. Probar que K es perfecto si y sólo si el morfismo $f : K \rightarrow K$ definido por $f(x) = x^p$ es automorfismo.
- (c) Probar que todo cuerpo finito es perfecto.
10. Probar que si K es un cuerpo de característica $p > 0$, entonces $K(X)$ no es perfecto.