Práctica 5

---

1. Sea E/K una extensión finita y sea $G = \mathrm{Aut}_K(E)$.

   (a) Sea H un subgrupo de G.
   Probar que $E^H = \{x \in E : \forall f \in H, \quad f(x) = x\}$ es una subextensión de E/K.

   (b) Sea F/K una subextensión de E/K.
   Probar que $G_F = \{f \in G : \forall x \in F, \quad f(x) = x\}$ es un subgrupo de G.

   (c) De acuerdo con los dos items anteriores, podemos definir aplicaciones entre las subextensiones de E/K y los subgrupos de G.
   Construir explícitamente dichas aplicaciones para la extensión de cuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \xi_3)/\mathbb{Q}$.
   Notar que, en este caso, son biyectivas y que una es inversa de la otra. ¿Qué relación guardan $(G : H)$ y $[E^H : K]$?

   (d) ¿Qué pasa en el caso de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$?

2. Sean E/K y L/K dos extensiones. Probar que si E/K y L/K son isomorfas entonces sus grupos de Galois son isomorfos. ¿Vale la recíproca?

3. Caracterizar los grupos de Galois de los cuerpos de descomposición señalados en los ejercicios 2 y 3 de la práctica 3.

4. Sea K un cuerpo finito de q elementos y sea E/K una extensión finita de K. Probar que E/K es cíclica con grupo de Galois $G(E/K) = \langle \sigma \rangle$, donde $\sigma : E \to E$ es el morfismo definido por $\sigma(x) = x^q$.

5. Sea $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$.

   (a) Calcular $[E : \mathbb{Q}]$. ¿Es $E/\mathbb{Q}$ una extensión normal?

   (b) Caracterizar $\mathrm{Aut}_K(E)$ y las subextensiones de grado 2 de $E/\mathbb{Q}$.

6. (a) Sea ξ_n una raíz primitiva n-ésima de la unidad y sea $c_n = f(\xi_n, \mathbb{Q})$. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión tal que c_n es irreducible en $K[X]$.
   Probar que $K(\xi_n)/K$ es una extensión galoisiana de grado $\varphi(n)$ y que $G(K(\xi_n)/K) \cong \mathcal{U}_n$

   (b) Probar que $\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{11})/\mathbb{Q}$ es la única subextensión de grado 5 de $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$.
   Hallar $f(\cos(\frac{2\pi}{11}), \mathbb{Q})$.

   (c) Probar que $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión de grado 2.

7. Encontrar una extensión $E/\mathbb{Q}$ tal que su grupo de Galois sea $\mathbb{Z}_6$.

8. Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Caracterizar $G(K(\xi_{20})/K)$.

9. Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición de $(X^2-2)(X^2-3)(X^2-5)$ sobre $\mathbb{Q}$.

10. Sea $E/\mathbb{Q}$ un cuerpo de descomposición del polinomio $X^8 - 2$.
    Calcular $[E : \mathbb{Q}]$ y caracterizar $G(E/\mathbb{Q})$.

11. Determinar todas las subextensiones de grado 2 del cuerpo de descomposición de $X^4 - 2X^2 - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

12. Sea p primo y sea E/K una extensión galoisiana de grado $p^n s$ con $n \in \mathbb{N}$ y $(p, s) = 1$. Probar que:
    (a) E/K tiene subextensiones de grado s y que dos cualesquiera de ellas son isomorfas.
    (b) Probar que si $p > s$ hay una única subextensión de grado s que, además, es galoisiana.

13. Sea E/K una extensión galoisiana de grado 15. Probar que E/K tiene sólo dos subextensiones propias. Calcular sus grados y ver que dichas subextensiones resultan galoisianas.

14. Sea E/K una extensión galoisiana de grado 45. Probar que si F/K es una subextensión de grado 3 de E/K, entonces F/K es galoisiana.

15. (a) Sea E/K una extensión galoisiana. Probar que existe una única subextensión abeliana máxima (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas).
    (b) Determinarla en el caso en que E es el cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$.

16. (a) Sean E/K y F/K dos subextensiones de grado finito de una extensión L/K. Probar que E/K y F/K son abelianas (es decir, galoisianas con grupo de Galois abeliano) si y sólo si $E \cdot F/K$ es abeliana.
    (b) Exhibir dos subextensiones de grado finito $E/\mathbb{Q}$ y $F/\mathbb{Q}$ de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ tales que $E \cdot F/\mathbb{Q}$ sea galoisiana pero ni $E/\mathbb{Q}$ ni $F/\mathbb{Q}$ lo sean.

17. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2.
    (a) Sea E/K una extensión galoisiana tal que $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
    Probar que $E = K(a, b)$ con $a^2,\ b^2 \in K$.

(b) Generalizar el item anterior para $G(E/K) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{n \text{ sumandos}}$.

(c) Sean $\alpha, \beta \in K$ tales que α, β y $\alpha\beta$ no son cuadrados en K. Si $x^2 = \alpha,\ z^2 = \beta$, caracterizar $G(K(x, z)/K)$.

18. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado mayor o igual que 2 con la propiedad de tener exactamente una raíz real y sea $E/\mathbb{Q}$ un cuerpo de descomposición de f. Probar que $G(E/\mathbb{Q})$ no es abeliano.

19. Sea $E = \mathbb{C}(X)$ (X una indeterminada). Consideremos los automorfismos f y g de E definidos por $g(X) = X^{-1}$ y $f(X) = wX$, donde w es una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Probar que:

    (a) $f^n = g^2 = id$ y $fg = gf^{-1}$

    (b) Deducir que el subgrupo G generado por f y g es D_n.

    (c) $E^G = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$

20. Sea K un cuerpo y sea $E = K(X)$. Probar que:

    (a)
$$\operatorname{Aut}_K(E) = \left\{ \varphi : \varphi(X) = \frac{aX + b}{cX + d} \text{ con } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \right\},$$

    (b) $\operatorname{Aut}_K(E)$ está generado por los automorfismos f_a, g_b y h definidos por
$$f_a(X) = aX, (a \in K^{\times}); \quad g_b(X) = X + b, (b \in K); \quad h(X) = X^{-1},$$

    (c) si K es un cuerpo de q elementos, $|\operatorname{Aut}_K(E)| = q^3 - q$,

    (d) $E^{\operatorname{Aut}_K(E)} = K(Y)$, donde $Y = \frac{(X^{q^2} - X)^{q+1}}{(X^q - X)^{q^2+1}}$.