Práctica 7

---

1. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo, $p \neq 2$. Determinar la única subextensión cuadrática de $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$.

2. (a) Demostrar que toda extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$ está contenida en una extensión ciclotómica.
   (b) En cada uno de los siguientes casos, exhibir una extensión ciclotómica $E/\mathbb{Q}$ tal que $F \subseteq E$:
   i) $F = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ **ii)** $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$ **iii)** $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-21})$
   iv) $F \subset \mathbb{C}$ el cuerpo de descomposición de $X^{10} + 3X^8 - X^2 - 3$

3. Sea $E/\mathbb{Q}$ un cuerpo de descomposición de $X^3 + X + 1$. Probar que el polinomio $X^4 - 6X^2 + 40$ es reducible en $E[X]$.

4. Para cada primo $p \in \mathbb{N}$, caracterizar $G(E/\mathbb{Q}(\xi_p))$, donde E es un cuerpo de descomposición de $f = X^{10} - X^5 + 1$.

5. Sea p primo y $f = X^5 + pX^3 + p$. Si $E/\mathbb{Q}$ es el cuerpo de descomposición de f, probar que $G(E/\mathbb{Q})$ contiene subgrupos de orden 2 no invariantes.

6. Sea K un cuerpo, $f \in K[X]$ de grado n y E cuerpo de descomposición de f. Probar que si $G(E, K) \simeq S_n$, entonces f es irreducible en $K[X]$.

7. Sean $E = K(t_1, t_2, t_3, t_4)$ y $F = K(s_1, s_2, s_3, s_4)$, donde $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ es un conjunto de indeterminadas y $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ es el conjunto de polinomios simétricos elementales en t_1, t_2, t_3, t_4.
   (a) Probar que $F(t_1 + t_2)/F$ es una subextensión no normal de E/F y calcular su grado.
   (b) Sean $1 \leq i < j \leq 4$. Probar que $t_i + t_j \in F(t_1 + t_2)$ si y sólo si $i = 1, j = 2$ o $i = 3, j = 4$.
   (c) Caracterizar $G(F(t_1 + t_2)/F)$.

8. Sean $\{t_1, ..., t_n\}$ un conjunto de indeterminadas y $\{s_1, ..., s_n\}$ el conjunto de polinomios simétricos elementales en $t_1, ..., t_n$.
   (a) Caracterizar las subextensiones de grado 2 de $K(t_1, ..., t_n)/K(s_1, ..., s_n)$.
   (b) Sean $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$. Probar que $t_1^{a_1} + t_2^{a_2} + ... + t_n^{a_n}$ genera $K(t_1, ..., t_n)/K(s_1, ..., s_n)$ si y sólo si $a_i \neq a_j \forall i \neq j$.
   (c) Probar que $t_1 + t_1t_1 + t_1t_2t_3 + ... + t_1t_2...t_{n-1}$ genera $K(t_1, ..., t_n)/K(s_1, ..., s_n)$.

9. Mostrar explícitamente que las siguientes extensiones son radicales:
   (a) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, i + \sqrt{3}\right)/\mathbb{Q}$
   (b) $K(t_1, t_2)/K(s_1, s_2)$, con K cuerpo de característica 0 , $\{t_1, t_2\}$ indeterminadas y $\{s_1, s_2\}$ los polinomios simétricos elementales en $\{t_1, t_2\}$.
   (c) $E/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $f = (X^4 - 2)(X^2 - 5)$.

10. (a) Sea p primo. Sea $H \subseteq S_p$ un subgrupo que contiene una transposición y una permutación de orden p. Probar que $H = S_p$.

    (b) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado p (primo) y $E \subseteq \mathbb{C}$ cuerpo de descomposición de f. Probar que si f tiene exactamente 2 raíces no reales en $\mathbb{C}$, entonces $G(E/\mathbb{Q}) \simeq S_p$.

11. (a) Probar que el polinomio $f = X^5 - 12X^4 + 46X^3 - 72X^2 + 88X - 98 \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ y que tiene exactamente 2 raíces no reales en $\mathbb{C}$.

    (b) Sea $E \subseteq \mathbb{C}$ el cuerpo de descomposición de f. Probar que $E/\mathbb{Q}$ no es resoluble por radicales.

12. Sea G un grupo. Recordar que la serie derivada se define inductivamente de la siguiente manera: $G^{(1)} = [G, G]$ y $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$.

    También definamos, de manera inductiva, la serie: $G^n = [G, G^{n-1}]$. Decimos que un grupo es *nilpotente* si $G^n = \{1\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Probar que si G es nilpotente, entonces es resoluble.

    (b) Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} /a, b, c \in K, ac \neq 0 \right\}$, con $K \neq \mathbb{F}_2$ un cuerpo. Probar que G es resoluble pero no nilpotente.

    (c) Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} /a, b, c \in K \right\}$, con K un cuerpo (también podría ser un anillo). Probar que G es nilpotente.

    (d) Probar que si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos, entonces $f(G^{(n)}) \subseteq H^{(n)}$ y $f(G^n) \subseteq H^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si existe n tal que H^n no es isomorfo a G^n, o $G^{(n)}$ no es isomorfo a $H^{(n)}$, entonces G y H no pueden ser isomorfos.

    (e) Probar que si G es nilpotente, entonces todo subgrupo de G también es nilpotente.

    (f) Sea H un subgrupo normal de G. Si H y G/H son nilpotentes, entonces G es nilpotente.

    Se define el *índice de nilpotencia* de un grupo G como el mínimo n tal que $G^n = \{1\}$. Probar que el índice de nilpotencia de G es menor o igual que la suma de los índices de nilpotencia de H y G/H.