Práctica 8

---

1. Probar que $\cos(\frac{2\pi}{17})$ es construible con rega y compás.

2. ¿Se puede trisecar un ángulo de $\frac{2\pi}{5}$ con regla y compás?

3. Sean R un subanillo de S y S un subanillo de un anillo T. Si S es entero sobre R y T es entero sobre S, probar que T es entero sobre R.

4. Sea K un cuerpo y $L = K(X)$ el cuerpo de funciones racionales en una variable sobre K.
   (a) Probar que todo elemento de L que es entero sobre $K[X]$, está en $K[X]$.
   (b) Probar que no existe un elemento no nulo $F \in K[X]$ tal que para cada $z \in L$, $F^n z$ es entero sobre $K[X]$ para algún $n > 0$.

5. Sean R un dominio íntegro, K su cuerpo de cocientes y E una extensión algebraica finita de K.
   (a) Para cualquier $v \in E$, probar que existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que av es entero sobre R.
   (b) Probar que existe una base $v_1, ..., v_n$ de E sobre K (como K-espacio vectorial) tal que cada v_i es entero sobre R.

6. Sea K un cuerpo. Sean $F, G \in K[X_1, ..., X_n]$ dos formas de grados r y $r + 1$, respectivamente, sin factores comunes. Probar que $F + G$ es irreducible.

   En lo que sigue K será un cuerpo algebraicamente cerrado, de carácterística 0.

7. Sea $f(x, y) = y^2 - x^3 + 4x$.
   (a) Probar que f es irreducible en $K[x, y]$.
   (b) Calcular $L = K[x, y]/f$.
   (c) Calcular el cuerpo de cocientes de L.

8. Sea $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$. Probar que el cuerpo de cocientes de $K[x, y]/f \simeq K(t)$.

9. Sea $F(u, v) = u^{15} + v^{15} - 1$.
   (a) Probar que si F es reducible en $K(u)[v]$, entonces $1 - u^{15}$ tiene una raíz cúbica o una raíz quinta en $K[u]$. Probar que $1 - u^{15}$ no es un cubo ni una potencia quinta en $K[u]$.
   (b) Sea L el cuerpo de cocientes de $K[u, v]/F(u, v)$. Sean G_3, G_5 los grupos de raíces cúbicas y quintas de la unidad, respectivamente. Sea $G = G_3 \times G_5$. G actúa en L mediante $u \mapsto u\,\xi_3$, $v \mapsto v\,\xi_5$. Probar que el cuerpo fijo de G es $E \simeq K(u^3, v^5)$.
   (c) Sea $f(x, y) = x^5 + y^3 - 1$. Probar que E es isomorfo al cuerpo de cocientes de $K[x, y]/f$ (considerar $u^3 = x$, $v^5 = y$).