Álgebra Lineal

Parcial 1. Primer Cuatrimestre 2001

(1) Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4, 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4, x_1 + x_3 + 3x_4)$. Encontrar $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente tales que

$$||f||_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Sea $f : \mathbb{R}_{<4}[x] \to \mathbb{R}_{<4}[x]$ un endomorfismo cuyo determinante es 2. Sean

$$\mathcal{B}_1 = \{2, x + 4, 3x^2 - 2x + 5, x^3 - 9\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{x^3 + 2x^2 + x - 1, 2x^3 + 2x^2 + 3x + 4, x^3 - x^2 + 2x + 1, x^3 + x^2 + x\}.$$

Calcular el determinante de $||f||_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

(3) Sean $\alpha \in (\mathbb{C}^3)^*$, $\beta \in (\mathbb{C}^3)^*$ dadas por $\alpha(x, y, z) = 3x + 2y - z$, $\beta(x, y, z) = 2x + z$. Sea $W =< (1, 1, 2), (-1, 2, 1) >\subset \mathbb{C}^3$. Exhibir $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $\alpha, \beta \in \mathrm{Im}(f^t)$ y $\mathrm{Nu}(f^t) = W^\circ$.

(4) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

(a) Sea $g : V \to V$ diagonalizable, $V = W \oplus W'$ tales que $g(W) \subseteq W$ y $g(W') \subseteq W'$. Probar que $g|_W : W \to W$ es diagonalizable.

(b) Sean $f, g : V \to V$ tales que $fg = gf$ y f es diagonalizable. Sea $W_c = \mathrm{Nu}(f - cI)$. Probar que W_c es invariante por g.

(c) Sean $f, g : V \to V$ diagonalizables tales que $fg = gf$. Probar que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $||f||_\mathcal{B}$ y $||g||_\mathcal{B}$ son diagonales. (Sugerencia: descomponer $V = W_{c_1} \oplus \cdots \oplus W_{c_k}$ donde los c_i son los autovalores de f).

(5) Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, $f, g \in V^*$ tales que $f \cdot g \in V^*$ ($f \cdot g$ se define por $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.) Probar que $f = 0$ ó $g = 0$.