Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Parcial 2

(1) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que su polinomio minimal tiene grado 2 y no tiene autovectores en $\mathbb{R}^n$.
  (a) Probar que A es diagonalizable en $\mathbb{C}$.
  (b) Probar que el polinomio característico de A está determinado por el minimal y por n, y encontrar su expresión.

(2) Encontrar la forma y la base de Jordan de la matriz de $\mathbb{C}^{4\times 4}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dar su polinomio minimal. ¿Se puede encontrar la forma de Jordan en $\mathbb{R}$? ¿Y en $\mathbb{Q}$?

(3) Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sean W y W' subespacios de V tales que $V = W \oplus W'$. Sea $p : V \to V$ la proyección sobre W con nucleo W', es decir $p(v) = w$ si $v = w + w'$ ($w \in W$ y $w' \in W'$). Probar que $W' = W^{\perp}$ si y solo si $||p(v)|| \leq ||v||$ para todo $v \in V$.

(4) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que T^tAT sea diagonal y sus coeficientes estén en $\{1, -1, 0\}$. Encontrar una matriz $S \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que S^tAS sea diagonal y sus coeficientes estén en $\{1, 0\}$. ¿Puede estar S en $\mathbb{R}^{4\times 4}$?

(5) Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimension finita y sea $T : V \to V$ un endomorfismo.
  (a) Probar que si W es un subespacio de V invariante por T entonces $W^{\perp}$ es invariante por T^*.
  (b) Probar que si T es normal y v es autovector de T de autovalor c entonces v es autovector de T^* de autovalor $\overline{c}$.
  (c) Probar que todo endomorfismo normal en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno de dimension finita es diagonalizable. (Sugerencia: usar inducción en la dimensión de V y los items anteriores).