# Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Práctica 1

Espacios vectoriales

**Advertencia:** En esta práctica los espacios vectoriales serán sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Se sugiere, en cada ejercicio, pensar qué propiedades de estos anillos se usan.

1. Probar las siguientes identidades ($V$ es un espacio vectorial, $v, w \in V$)
   (a) $2v = v + v$
   (b) $0v = \mathbf{0}$
   (c) $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$
   (d) $(-1)v = -v$
   (e) $(-\lambda)v = -(\lambda v)$
   (f) $\forall n \in \mathbb{N}$, $nv = \underbrace{v + v + \cdots + v}_{n \text{ veces}}$
   (g) $\forall \lambda \neq 0$, $\forall v \in V$, $\exists w \in V$ tal que $\lambda w = v$. En particular, si $n \in \mathbb{N}$, $\exists w$ tal que $nw = v$ (**Sutileza:** ¡se usa que $n$ es inversible!)
   (h) $\lambda v = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$ ó $v = \mathbf{0}$.
2. Para $v = (2, 0)$, $w = (-1, \sqrt{3})$, dibujar $v$, $w$, $v + w$, $-v$, $-w$, $-v - w$. Agregarle al dibujo los puntos de la forma $x + y$, donde $x$ e $y$ recorren cada uno de los puntos anteriores.
3. Para $v, w \in \mathbb{R}^2$ vectores cualesquiera tales que no sea uno un múltiplo del otro, dibujar
   (a) $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\{\lambda v \mid \lambda \geq 0\}$
   (c) $\{\lambda v \mid \lambda > 0\}$
   (d) $\{\lambda v \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$
   (e) $\{\lambda v \mid 1 \leq \lambda \leq 3\}$
   (f) $\{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   (g) $\{\lambda v + \mu w \mid \lambda \geq 0,\ \mu \leq 0\}$
   (h) $\{\lambda v + w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (i) $\{\lambda(v - w) + w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (j) $\{\lambda(w - v) + v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (k) $\{\lambda v + \mu w \mid \lambda + \mu = 1\}$
   (l) $\{\lambda v + \mu w \mid \lambda + \mu = 1,\ \lambda \geq 0\}$
   (m) $\{\lambda v + \mu w \mid \lambda + \mu = 1,\ \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0\}$
4. Probar que si $v_1, \ldots, v_n \in V$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:
   (a) Existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \mathbf{0}$,
   (b) Existe $i$ tal que $v_i$ se escribe como combinación lineal de los $v_j$, $j \neq i$.
   (c) Existe $i$ tal que $\{v_j \mid j \neq i\}$ genera el mismo conjunto que $\{v_j \mid j = 1 \ldots n\}$.
5. Para $v, w, x \in \mathbb{R}^3$ vectores cualesquiera tales que no sea uno un múltiplo del otro, imaginar
   (a) Los conjuntos definidos igual que en el ejercicio 3 (ahora son subconjuntos de $\mathbb{R}^3$).
   (b) $\{\lambda v + \mu w + \nu x \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$ (**Sugerencia:** distinguir dos casos. En el primero, uno de los tres vectores es combinación lineal de los otros dos. En el segundo, no.)
   (c) $\{\lambda v + \mu w + \nu x \mid \lambda + \mu = 1\}$
   (d) $\{\lambda(v - x) + \mu(w - x) + x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   (e) $\{\lambda v + \mu w + \nu x \mid \lambda + \mu + \nu = 1\}$
   (f) $\{\lambda v + \mu w + \nu x \mid \lambda + \mu + \nu = 1, \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \nu \geq 0\}$
6. Probar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales. En los casos en que no se aclara, las operaciones son las obvias.
   (a) $\{(x, y) \mid x = y\}$,
   (b) $\{(x, y) \mid x - 2y = 0\}$,
   (c) $\{(x, y, z) \mid x + 3y - 272z = 0\}$,
   (d) $\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\}$,
   (e) las matrices triangulares superiores de $n \times n$, $A = (a_{ij}), a_{ij} = 0\ \forall i > j$
   (f) las matrices diagonales de $n \times n$, $A = (a_{ij}), a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$
   (g) las matrices simétricas de $n \times n$, $A = (a_{ij}), a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$,

(h) las matrices antisimétricas de $n \times n$, $A = (a_{ij}), a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i, j$,

(i) $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$, con la suma definida por

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 y_1,\ \sqrt[5]{x_2^5 + y_2^5},\ \arctan(\tan(x_3) + \tan(y_3))$$

y el producto por escalares

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (x_1^\lambda,\ \sqrt[5]{\lambda} x_2,\ \arctan(\lambda \tan(x_3))).$$

¿Dónde están los escalares?

7. Decidir cuáles de los siguientes son espacios vectoriales
   (a) $\mathcal{C}[0,1]$, las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$.
   (b) $\mathcal{C}^1(0,1)$, las funciones diferenciables en el intervalo $(0,1)$.
   (c) $\mathcal{C}^\infty(0,1)$, las funciones infinitamente diferenciables en el intervalo $(0,1)$.
   (d) las funciones en $\mathcal{C}^\infty(0,1)$ que son solución de la ecuación diferencial $3f'' - 2f' + f = 0$.
   (e) las funciones en $\mathcal{C}^\infty(0,1)$ que son solución de la ecuación diferencial $f \cdot f' = 0$.
   (f) $\mathbb{K}[x]$, los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$.
   (g) $\mathbb{K}_{<n}[x]$, los polinomios de grado $< n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ (**Obs:** el polinomio $\mathbf{0}$ tendrá para nosotros grado $-\infty$, que es menor que cualquier natural).
   (h) los polinomios de grado $\geq n$ y el $\mathbf{0}$.
   (i) los polinomios tales que todos sus términos no nulos son de grado $\geq n$.
   (j) las matrices de $2 \times 2$ de determinante 0.
   (k) las matrices de $2 \times 2$ de traza 0 (la traza de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es $a + d$).
   (l) las soluciones de la ecuación $3x + 2y - z = 2$.
   (m) las series $(a_n)$ absolutamente convergentes.
   (n) las sucesiones $(a_n)$ tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
   (o) las sucesiones $(a_n)$ tales que existe el $\lim_{n\to\infty} a_n$.
   (p) las sucesiones $(a_n)$.
   (q) Difícil: las sucesiones $(a_n)$ de cuadrado sumable, o sea $\sum_n a_n^2 < \infty$.
   (r) las soluciones de $x^2 + x^2 - z^2 = 0$.
   (s) las soluciones de $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (tener en cuenta los casos $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

8. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones sobre $\mathbb{R}$. ¿Qué cambia si se los resuelve sobre $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{C}$?

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 6 \end{cases}$

9. Resolver los siguientes sistemas y comparar los conjuntos de soluciones. Interpretar geométricamente.

(a) $\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \end{cases}$

10. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos. Considerar en cada uno de ellos el sistema homogéneo asociado ($A \cdot x = 0$).

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= \beta \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= \gamma \end{cases}$
$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$

11. Determinar los vectores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tales que el sistema admite solución

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha_3. \end{cases}$$

Observar que el conjunto de estos vectores es un subespacio. Encontrar un sistema de generadores de este subespacio.

12. (Versión general del ejercicio anterior). Sea $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$ una matriz. Sea $S \subset \mathbb{K}^n$ el conjunto de los $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tales que el sistema de ecuaciones

$$\sum_j a_{ij}x_j = \alpha_i \ \forall i = 1, \dots, n$$

admite solución. Probar que $S$ es un subespacio. Encontrar un sistema de generadores de $S$ en términos de la matriz $(a_{ij})$.

13. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones en términos de $s, t$.

(a) $\begin{cases} (5-t)x_1 - 2x_2 - x_3 & = 1 \\ -2x_1 + (2-t)x_2 - 2x_3 & = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + (5-t)x_3 & = s \end{cases}$ (b) $\begin{cases} tx + y + z = 1 \\ x + ty + z = t \\ x + y + tz = t^2 \end{cases}$

14. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para que cada uno de los siguientes sistemas tenga solución única. Para los casos en los que tiene más soluciones, resolver el sistema.

(a) $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + (k-1)x_2 = 0 \\ x_1 + (3k-4)x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + (k-1)x_2 + \frac{k}{2}x_3 = 0 \end{cases}$

15. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{C}^2$

$$\begin{cases} (1-i)x_1 - ix_2 & = 0 \\ 2x_1 + (1-i)x_2 & = 0 \end{cases}$$

16. Resolver en $\mathbb{C}^3$ el sistema $A \cdot x = 0$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1-i & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{pmatrix}$$

17. Encontrar un sistema a coeficientes reales cuya solución general sea:

$$(1,1,0) + \lambda(1,2,1) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

18. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{K}^{m\times 1}$.
 (a) Si el sistema $A \cdot x = 0$ tiene solución única, probar que el sistema $A \cdot x = b$ tiene a lo sumo una solución. Dar ejemplos de los distintos casos que se puedan presentar.
 (b) ¿Vale la recíproca del punto anterior?

19. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v_1,\ v_2,\ v_3 \in V$. Probar que si $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$ entonces $< v_1, v_2, v_3 > = < v_3 >$

20. Sea $S = < (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.
 (a) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.
 (b) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.
 (c) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

21. ¿Es cierto que las matrices hermitianas de $n \times n$ son un $\mathbb{C}$-espacio vectorial? (**Def:** $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$). ¿Y un $\mathbb{R}$-espacio vectorial?.

22. Decidir si los siguientes son conjuntos linealmente independientes o no.
 (a) $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,2,5)$.
 (b) $(1,0,-1)$, $(1,1,2)$, $(0,1,1)$.
 (c) $(1,1,2)$, $(1,0,0)$.
 (d) $(1,1,2)$, $(1,4,-7)$, $(12,123,1234)$, $(e,\pi,\sqrt{2})$.
 (e) $1$, $\pi$ (aquí es $V = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$).

(f) Difícil: $\{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
(g) $(1,1,1)$, $(1,\alpha,\alpha^2)$, $(1,\beta,\beta^2)$ (va a depender de $\alpha$ y $\beta$).
(h) $V = \mathcal{C}(0,1)$, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{sen}^2(x)$.
(i) $V = \mathbb{R}^3$, el conjunto son los 3 vértices $\neq \mathbf{0}$ de un tetrahedro regular que tiene un vértice en $\mathbf{0}$.

23. Extraer, de los siguientes conjuntos, subconjuntos l.i. Entre la posibilidad de tirar dos vectores, elegir siempre el que aparece después en la lista. En los casos en los que el conjunto resultante no genere todo el espacio, completarlo a una base.
(a) $(1,0,0)$, $(1,1,2)$, $(1,3,0)$, $(1,0,-2)$.
(b) $(1,1,2)$, $(1,3,0)$, $(1,0,-2)$, $(1,0,0)$.
(c) $(1,0,0,0)$, $(2,0,0,0)$, $(3,0,0,0)$, $(1,0,1,2)$, $(4,0,2,4)$, $(0,0,1,7)$.
(d) $(1,0,1,-1)$, $(1,2,1,0)$, $(1,4,2,1)$, $(0,1,2,3)$, $(2,7,5,4)$, $(-1,7,2,7)$.
(e) $V = \mathbb{K}_{<3}[x]$, $\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $-(x-1)(x-3)$, $\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$.

24. Sean $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1,\dots,v_n\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R} \Leftrightarrow \{v_1,\dots,v_n\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

25. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Probar
(a) $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n\} \subseteq V$ son l.i. $\Leftrightarrow \{v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n\} \subseteq V$ son l.i.
(b) $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_n\} \subseteq V$ son l.i. $\Leftrightarrow \{v_1,\dots,\lambda v_i,\dots,v_n\} \subseteq V$ son l.i.
(c) $\lambda \in \mathbb{K}$, $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n\} \subseteq V$ son l.i. $\Leftrightarrow \{v_1,\dots,v_i+\lambda v_j,\dots,v_j,\dots,v_n\} \subseteq V$ son l.i.
Notar que 25a, 25b, 25c justifican el "método de triangulación" para analizar la dependencia o independencia lineal de vectores en $\mathbb{K}^n$.

26. Sea $V$ un espacio vectorial finitamente generado (**Definición:** tiene (al menos) un conjunto de generadores que es finito). Probar que $V$ tiene una base. Más difícil: probar que dos bases tienen la misma cantidad de generadores.

27. Calcular la dimensión y encontrar bases de los siguientes espacios vectoriales en los casos de dimensión finita.
(a) $\mathbb{K}^n$.
(b) $M_n(\mathbb{K})$, las matrices de $n \times n$.
(c) las matrices triangulares superiores en $M_n(\mathbb{K})$ (**Def:** $a_{ij} = 0$ si $i > j$).
(d) las matrices estrictamente triangulares superiores en $M_n(\mathbb{K})$ (**Def:** $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$).
(e) las matrices simétricas en $M_n(\mathbb{K})$.
(f) las matrices antisimétricas en $M_n(\mathbb{K})$.
(g) $\mathbb{C}$ visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
(h) $\mathbb{C}^n$ visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
(i) $\mathbb{R}$ visto como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.
(j) $\mathbb{R}_{<n}[x]$.
(k) $\{p \in \mathbb{R}_{<n}[x] \mid p(1) = p(2) = 0\}$.
(l) $\{p \in \mathbb{R}_{<n}[x] \mid p(1) = p'(2) = p''(3) = 0\}$.

28. Sea $\{v_1,\dots,v_n\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$. Si $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ y los $a_{ij}$ verifican que
- $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$,
- $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$,

probar que estamos en presencia de una base de $\mathbb{R}^n$.

29. (a) Sea $\mathrm{B} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ donde cada $f_i$ es un polinomio de grado exactamente $i$. Probar que B es una base de K[X].
(b) ¿Es $\{(1,0,0,0,0,\dots),\ (0,1,0,0,0,\dots),\ (0,0,1,0,0,\dots),\ (0,0,0,1,0,\dots),\dots\}$ una base de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$?

30. (a) Caracterizar geométricamente todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
(b) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación de escalares.
(c) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.

31. Mirar nuevamente el ejercicio 7 y determinar, entre los que sean e.v., cuáles son subespacios de cuáles.

32. Calcular una base de la suma de los siguientes subespacios y especificar si están en suma directa o no.
(a) $W_1 = <(1,2,1)>$, $W_2 = \{x + 2y + z = 0\}$.
(b) $W_1 = <(1,2,1)>$, $W_2 = <(1,1,1)>$.
(c) $W_1 = \{x + 2y + z = 0\}$, $W_2 = \{x + y + z = 0\}$.
(d) $V = \mathbb{K}^{n\times n}$, $W_1 = \{\text{triangulares superiores}\}$, $W_2 = \{\text{triangulares inferiores}\}$.
(e) $V = \mathbb{K}^{n\times n}$, $W_1 = \{\text{triangulares superiores}\}$, $W_2 = \{\text{estrictamente triangulares inferiores}\}$.
(f) $V = \mathbb{K}^{n\times n}$, $W_1 = \{\text{simétricas}\}$, $W_2 = \{\text{antisimétricas}\}$.

33. Hallar todos los $b \in \mathbb{R}$ para los cuales el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + (b-6)x_2 + 5bx_3 & = 0 \\ x_1 + (b-2)x_2 + (b^2+4b)x_3 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + bx_3 & = 0 \end{cases}$$

   (a) tenga dimensión 1.
   (b) tenga dimensión 2.

34. Probar que la unión de dos subespacios es un subespacio si y solo si uno de ellos está incluido en el otro.

35. Sean $S$ y $T$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ $S =< (1,2,1,0),(2,1,0,1) >$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}$. Hallar un subespacio U de $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim U = 2$ y $S \cap T \subset U \subset T$.

36. Asignar un valor de verdad a las siguientes afirmaciones
   (a) $< v, w >=< v, w' > \Rightarrow w = w'$.
   (b) $S + T = S + T' \Rightarrow T = T'$ (aquí $S, T, T'$ son subespacios de $V$).
   (c) $S + T = S + T' \Rightarrow \dim T = \dim T'$.

37. Para cada $S$ dado hallar $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$ (en este caso $T$ se dice un *complemento* de $S$ con respecto a $V$)
   (a) $S =< (1,2,-1,3),\ (2,3,-2,1),\ (0,1,0,7) >$, $V = \mathbb{R}^4$.
   (b) $S = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (c) $S =< 3, 1 + X^2 >$, $V = \mathbb{R}_{<4}[X]$.

38. Se considera el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $V \subset \mathbb{R}$ generado por los vectores $\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}\}$.
   (a) Utilizando un argumento de dimensión probar que existe un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ con $\operatorname{gr}(f) \leq 4$ que se anula en el punto $\psi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Hallar un tal $f$.
   (b) Calcular $\dim_{\mathbb{Q}} V$.

39. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar
   (a) $S,\ T$ subespacios de $\mathbb{R}^3$, $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists v \neq \mathbf{0}$ tal que $v \in S \cap T$.
   (b) $S,\ T,\ W$ subespacios de $\mathbb{R}^{11}$ $\dim S = \dim T = \dim W = 4 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$

40. Sean $S,\ T, U$ subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $V$ tales que
   - $S \cap T = S \cap U$,
   - $S + T = S + U$,
   - $T \subseteq U$.

   Probar que $T = U$.

41. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n$ y $T$ un hiperplano de $V$ (es decir, un subespacio de dimensión $n-1$)
   (a) Probar que $\forall v \notin T$, $T+ < v >= V$ y están en suma directa.
   (b) Si $S$ es un subespacio de $V$ tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.
   (c) Si $S$ y $T$ son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

42. Dado un espacio $V$ y un subespacio $W$, se denomina *codimensión* de $W$ en $V$ a la dimensión de un complemento.
   (a) Probar que si un complemento tiene dimensión finita, entonces todos los complementos tienen la misma dimensión. Esto dice que la definición anterior es razonable (**Obs:** si no hay complemento de dimensión finita, también se puede probar que todos los complementos tienen la misma dimensión. Esto sin embargo es más difícil; es similar a la demostración de que dos bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal.)
   (b) Encontrar la codimensión de un hiperplano en un espacio de dimensión finita.
   (c) Encontrar la codimensión de $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 0\}$ en $\mathbb{R}[x]$.
   (d) Encontrar la codimensión de $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = f(1) = f(2) = 0\}$ en $\mathbb{R}[x]$.

43. Sea $S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Probar que $S$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Calcular su dimensión.
   (b) Encontrar una base de $S$ formada por sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que, $\forall n \in \mathbb{N}$, verifiquen $u_n = u^{n-1}$ para algún $u \in \mathbb{R}$.
   (c) Usando (b), encontrar una fórmula para el término general de la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$