Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Práctica 10

Espacios Vectoriales con Producto Interno

Nota: En esta práctica, todos los espacios vectoriales serán sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ únicamente.

Notación: Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $A^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ denota la matriz transpuesta conjugada de A cuyos coeficientes satisfacen $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

(1) Sea V un espacio vectorial y sea $\langle , \rangle$ un producto interno sobre V. Probar:
   (a) $\langle x,\, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
   (b) $\langle x,\, cy\rangle = \bar{c}\,.\langle x, y\rangle$
   (c) $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle\ \forall\, x \in V \ \Rightarrow\ y = z$

(2) Sea $\big(V, \langle\, , \,\rangle\big)$ un espacio vectorial con producto interno. Probar que $|\langle x, y\rangle| = ||x||.||y||$ si y sólo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

(3) Sea V un espacio vectorial. Demostrar que la suma de dos productos internos sobre V es un producto interno sobre V.

(4) Sea V un espacio vectorial con producto interno. Se define la distancia entre dos vectores $x, y \in V$ como $d(x, y) = ||x - y||$. Probar que
   (a) $d(x, y) \geq 0$
   (b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
   (c) $d(x, y) = d(y, x)$
   (d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

(5) Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.
   (a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$
   (b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$
   (c) $\Phi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$
   $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
   (d) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
   $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_2 - x_1.\overline{y}_2 - x_2.\overline{y}_1$
   (e) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
   $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + (1+i).x_1.\overline{y}_2 + (1+i).x_2.\overline{y}_1 + 3.x_2.\overline{y}_2$
   (f) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
   $\Phi(x, y) = x_1.\overline{y}_1 - i.x_1\overline{y}_2 + i.x_2\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2$
   (g) $\Phi : \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$
   $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_3.\overline{y}_3 - x_1.\overline{y}_3 - x_3.\overline{y}_1$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
   (h) $\Phi : \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$
   $\Phi(x, y) = 3.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_1.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(6) Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) = x_1.y_1 - 2.x_1.y_2 - 2.x_2.y_1 + 6.x_2.y_2$$

   Probar que Φ es un producto interno. Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ.

(7) Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{R}$ y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Probar que para todo $v, w \in V$ vale lo siguiente:
   (a) $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i$
   (b) $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle\langle w, v_i\rangle$
   (c) $||v|| = \big(\sum \langle v, v_i\rangle^2\big)^{1/2}$

(8) Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{R}$. Probar que

$$\langle v, w\rangle = 1/4||v + w||^2 - 1/4||v - w||^2$$

(9) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.
   (a) Probar que existe un único producto interno en V para el cual B resulta ortonormal.
   (b) Hallarlo en los casos
      (i) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$

(ii) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$
(iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
(iv) $V = \mathbb{C}^3$ y $B = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$

(10) Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) = y.A.x^t$$

Probar que Φ es un producto interno sobre $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $A = A^t$, $A_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$.

(11) Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ es

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1 + b).x_3.y_3$$

un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

(12) Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:
(a) $\langle, \rangle : \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$
$\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
(b) $\langle, \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \to \mathbb{R}$
$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx$
(c) $\langle, \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$
$\langle x, y\rangle = \overline{y}.\,Q^*.Q.\,x^t$
donde $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz inversible, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
(d) $\langle, \rangle_T : V \times V \to \mathbb{K}$ $\langle x, y\rangle_T = \langle T(x), T(y)\rangle$
donde V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, $\langle, \rangle$ es un producto interno sobre W y $T : V \to W$ es un monomorfismo, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(13) Restringir el producto interno del segundo item del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_{<n+1}[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \ldots, X^n\}$.

(14) Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:
(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$
para el producto interno canónico.
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S_2 =< (1, 2, 1) >$
Para el producto interno canónico y para el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_1.y_2 - x_2.y_1$$

(c) $V = \mathbb{C}^4$, $S_4 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2i.x_2 - x_3 + (1 + i).x_4 = 0 \\ x_2 + (2 - i).x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\right\}$
para el producto interno $\langle x, y\rangle = x_1.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3 + 3.x_4.\overline{y}_4$.
(d) $V = \mathbb{R}^4$, $S_5 =< (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) >$
para el producto interno canónico.

(15) Para los subespacios del ejercicio anterior, hallar bases ortonormales para cada uno de los productos internos considerados. Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios. Hallar el punto de S_5 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$.

(16) Sean S_1, S_2 y S_3 los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2.x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2.x_1 + 2.x_4 = 0 \end{cases} \qquad S_3 : \{2.x_1 + x_2 + 2.x_3 = 0$$

Encontrar una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $v_i \in S_i$ $(i = 1, 2, 3)$. ¿Por qué este problema tiene solución?

(17) Se define $\langle, \rangle : \mathbb{R}_{<n+1}[X] \times \mathbb{R}_{<n+1}[X] \to \mathbb{R}$ como

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).g\left(\frac{k}{n}\right)$$

Probar que $\langle, \rangle$ es un producto interno. Para $n = 2$, calcular $< X >^{\perp}$.

(18) (a) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.
(b) Se considera $\mathbb{R}_{<4}[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S =< 1 >$.
(c) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x)dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$.
Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S =< 1, x, x^2, x^3, \mathrm{sen}(\pi x) >$.

(d) Se considera $C[0,\pi]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t).g(t)dt$.
   (i) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, \cos t, \operatorname{sen} t\}$.
   (ii) Sea S el subespacio de $C[0,\pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

(19) Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$. Sea $W \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita de V. Probar que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^\perp$ y $\langle x, y\rangle \neq 0$.

(20) Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal, para el producto interno canónico, sobre el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$.
(a) Encontrar una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L) = (1,2,1)$. ¿Es única?
(b) Encontrar una recta $L_1 \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L_1) = L_2$ siendo

$$L_2 : \begin{cases} 2.x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

¿Es única?

(21) Sean $A = (1,1,2)$ y $B = (2,0,2)$. Sea $\Pi = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 2\}$. Hallar $C \in \Pi$ tal que A, B y C formen un triángulo equilátero. ¿La solución es única?

(22) Sean A_1, A_2 y A_3 en $\mathbb{R}^3$ tres puntos no alineados. Probar que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathrm{d}(x, A_1) = \mathrm{d}(x, A_2) = \mathrm{d}(x, A_3)\}$ es una recta ortogonal al plano que contiene a A_1, A_2 y A_3. Calcular S en el caso $A_1 = (1,-1,0)$, $A_2 = (0,1,1)$ y $A_3 = (1,1,2)$.

(23) Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A_1 = (1,-1,0)$ y $A_2 = (1,1,1)$. Encontrar tres hiperplanos H tales que $\mathrm{d}(A_1, H) = \mathrm{d}(A_2, H)$.

(24) Sea en $\mathbb{R}^3$ el producto interno $\langle \, , \, \rangle$ definido en la base canónica por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3.x_1 - 2.x_2 - 3.x_3$. Hallar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x) = \langle x, v\rangle$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$.

(25) Se considera en $\mathbb{C}^{3\times 3}$ el producto interno definido por $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\ (A.B^*)$.

Sea $f : \mathbb{C}^{3\times 3} \to \mathbb{C}$ la transformación lineal definida por $f(A) = (1, i, 1)A \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

Hallar $C \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $f(A) = \langle A, C\rangle \quad \forall\, A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(26) Se considera en $\mathbb{R}_{<4}[X]$ el producto interno definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}_{<4}[X])^*$ definida por $\varphi(p) = p(5)$. Hallar $g \in \mathbb{R}_{<4}[X]$ tal que $\varphi(p) = \langle p, g\rangle \quad \forall p \in \mathbb{R}_{<4}[X]$.

(27) Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$
(b) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$
(c) $B = \{(1,2,-1), (1,0,0), (0,1,1)\}$, $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y

$$||f||_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) $f : \mathbb{R}_{<3}[X] \to \mathbb{R}_{<3}[X]$, $\quad f(p) = p'$ $\quad$ (donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$).
(e) $P \in GL(n, \mathbb{C})$, $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(A) = P^{-1}.A.P$ $\quad$ (donde $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$).
(f) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\mu_f(p) = f.p$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$

(28) Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sean f_1 y f_2 endomorfismos de V y sea k un escalar. Probar
(a) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$
(b) $(k.f_1)^* = \overline{k}.f_1^*$
(c) $(f_1 \circ f_2)^* = (f_2)^* \circ (f_1)^*$
(d) Si f_1 es un isomorfismo, entonces f_1^* es un isomorfismo y $(f_1^*)^{-1} = (f_1^{-1})^*$
(e) $((f_1)^*)^* = f_1$
(f) $f_1^* \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$

(29) Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}\ (f))^\perp$.

(30) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x,y,z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y)$$

Hallar un producto interno $<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que f sea autoadjunta para $<,>$.

(31) Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $P : V \to V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

(32) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

(33) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(34) Encontrar una base ortonormal B de $\mathbb{R}^2$ tales que $||f||_B$ y $||g||_B$ sean diagonales si las matrices de f y de g en la base canónica son

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(35) Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal.

(a) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.

(b) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:

(i) $||f(v)|| = ||f^*(v)|| \quad \forall v \in V$. En particular $Nu f = Nu f^*$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ f - \lambda I$ es normal.

(iii) Sea v un autovector de f de autovalor λ. Entonces v es un autovector de f^* de autovalor $\overline{\lambda}$.

(iv) $E_\lambda = \{v \in V \ / \ f(v) = \lambda.v\}$ es f^*-invariante.

(c) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores. (Sugerencia: observar que $(E_\lambda)^\perp$ es f-invariante y f^*-invariante).

(d) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que **no** sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

(36) Probar que el único endomorfismo normal y nilpotente es el cero.

(37) Probar que f es normal si y solo si $f = f_1 + if_2$, donde f_1 y f_2 son endomorfismos autoadjuntos que conmutan.

(38) Hallar una matriz unitaria que no sea ortogonal y una ortogonal que no sea unitaria.

(39) Sea $V = \mathbb{K}^{n\times n}$ con el producto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^*)$$

Dada $M \in V$ definimos el endomorfismo $T_M : V \to V$ por $T_M(A) = MA$. Probar que T_M es unitario si y solo si M es unitaria.

(40) Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

(41) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se llama isometría si verifica que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \qquad \forall\, x\,,\, y\, \in \mathbb{R}^2$$

Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal. Deducir que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría si y sólo si existen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformación ortogonal y $A \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + A\,,\, \forall\, x \in \mathbb{R}^2$