Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Práctica 11

Formas bilineales. Cuádricas

(1) Probar que las siguientes funciones son formas bilineales:
   (a) $\Phi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definida por $\Phi(x, y) = x.A.y^t$ donde $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
   (b) $\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ definida por $\Phi(v, w) = f_1(v).f_2(w)$ donde V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f_1,\ f_2 \in V^*$.
   (c) $\Phi : \mathbb{K}^{m\times n} \times \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}$ definida por $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(A^t.C.B)$ donde $C \in \mathbb{K}^{m\times m}$.

(2) Determinar si las siguientes funciones son o no formas bilineales. En caso afirmativo calcular su matriz en la base canónica correspondiente y determinar si la forma bilineal es simétrica:
   (a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$
   (b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \Phi(x, y) = -x_1.y_1 - x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + 2.x_1.y_2$
   (c) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}\ \Phi(x, y) = (1 + i).x_1.y_1 + x_2.y_1 + (1 - i)x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$
   (d) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \Phi(x, y) = x_1^2 + x_2.y_1 + x_1.y_2 - x_2^2$
   (e) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ \Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_3.y_3 - x_1.y_3 - x_3.y_1$
   (f) $\Phi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}\ \Phi(x, y) = x_1.y_1 + (2 + i)x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + (2 + i).x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_3.y_1 - x_3.y_3$
   (g) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ \Phi(x, y) = (3x_1 + x_2 - x_3).(4y_2 + 2y_3)$

(3) (a) Para las formas bilineales sobre $\mathbb{R}^3$ del ejercicio anterior, calcular su matriz en la base
$$\{(1, 2, 4), (2, -1, 0), (-1, 2, 0)\}.$$
   (b) Para las formas bilineales simétricas del ejercicio anterior calcular su núcleo.

(4) Hallar una forma bilineal Φ simétrica en $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}\Phi = < (1, 2, -1) >$ y $\Phi((1, 1, 1), (1, 1, 1)) < 0$. Calcular la matriz de Φ en la base canónica.

(5) Para cada una de las formas bilineales reales siguientes hallar una base ortonormal tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal, exhibir la matriz de la forma bilineal en esta base. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.
   (a) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
   (b) $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 2.x_1.y_3 + 2.x_3.y_1 - x_3.y_3 - x_4.y_4$.

(6) Diagonalizar las siguientes formas bilineales en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. En $\mathbb{R}$ hacerlo de manera que en la diagonal haya $0, 1, -1$. En $\mathbb{C}$, de manera que haya $0, 1$.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -5 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

(7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que la forma bilineal que tiene a A como matriz en la base canónica es definida negativa si y sólo si los signos de los menores principales van alternándose comenzando por un signo menos.

(8) Probar que dos formas bilineales reales son equivalentes si tienen igual rango e igual signatura. Probar que dos formas bilineales complejas son equivalentes si tienen igual rango. ¿Qué pasa en $\mathbb{Q}$?

(9) Dibujar en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos

   (a) $\{x^2 + y^2 = 1\}$.
   (b) $\{x^2 + y^2 + 2x - 2y = -1\}$.
   (c) $\{xy - x + 3y = 2\}$.
   (d) $\{x^2 - y^2 + 4x - 2y = 4\}$.
   (e) $\{2x^2 + xy - y^2 = 0\}$.
   (f) $\{x^2 + y^2 - 2x + 4y = -5\}$.

(10) Caracterizar en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{C}^3$ los conjuntos

   (a) $\{5x^2 + 11y^2 + z^2 - 4xy - 2yz - 1 = 0\}$.
   (b) $\{5x^2 + 11y^2 + z^2 - 4xy - 2yz = 0\}$.
   (c) $\{5x^2 - 4xy + 9y^2 - z^2 + 2yz - 1 = 0\}$.
   (d) $\{5x^2 - 4xy + 9y^2 - z^2 + 2yz = 0\}$.
   (e) $\{5x^2 - 4xy + 9y^2 - z^2 + 2yz + 1 = 0\}$.
   (f) $\{5x^2 - 4xy + 2y^2 - 2xz + 2z^2 + 2yz + 8x - 8y - 10z + 13 = 0\}$.
   (g) $\{5x^2 - 4xy - 2xz - 2yz + 8x - 8y - 10z - 4 = 0\}$.