# Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Práctica 2

Transformaciones Lineales y Matrices

1. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{K}^{n\times n}$ y calcular su dimensión.
   (a) $S_1 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / A = A^t\}$ (matrices simétricas)
   (b) $S_2 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)
   (c) $S_3 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)
   (d) $S_4 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)
   (e) $S_5 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn}\}$ (matrices escalares)
   (f) $S_6 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / tr(A) = 0\}$
   (g) $S_7 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\}$ (matrices estrictamente triangulares inferiores)

2. Sean $S_1$ , $S_2$ , $S_5$ y $S_7$ los subespacios del ejercicio anterior.
   (a) Probar que $\mathbb{K}^{n\times n} = S_3 \oplus S_7$.
   (b) Probar que, si $2 \neq 0$ en $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{n\times n} = S_1 \oplus S_2$.
   (c) Probar que, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}^{n\times n} = S_5 \oplus S_6$.

3. Sean $m$ , $n$ y $r \in \mathbb{N}$. Probar:
   (a) Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ , $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$ y $C \in \mathbb{K}^{r\times s}$, entonces $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
   (b) Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ , $B, C \in \mathbb{K}^{n\times r}$, entonces $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
   (c) Si $I_r \in \mathbb{K}^{r\times r}$ denota la matriz identidad y $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, entonces $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$
   (d) Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$ con $B = (b_{ij})$, sea $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ para $1 \leq j \leq r$ (la columna $j$-ésima de $B$), entonces $A \cdot B = (A \cdot B_1 | ... | A \cdot B_r)$ (es decir, $A \cdot (B_j)$ es la columna $j$-ésima de $(A \cdot B)$).
   (e) Sean $A,\ A' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ; $B,\ B' \in \mathbb{K}^{n\times m}$ ; $C,\ C' \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $D,\ D' \in \mathbb{K}^{m\times m}$.
   Sea $M, M' \in \mathbb{K}^{(n+m)\times(n+m)}$ definidas por
   $$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$
   Entonces $$M \cdot M' = \begin{pmatrix} A \cdot A' + B \cdot C' & A \cdot B' + B \cdot D' \\ C \cdot A' + D \cdot C' & C \cdot B' + D \cdot D' \end{pmatrix}$$

4. (a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$ no es conmutativo.
   (b) Caracterizar el conjunto $\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} / A \cdot B = B \cdot A \ \ \forall B \in \mathbb{K}^{n\times n}\}$.
   (c) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que el conjunto $S$ de todas las matrices que conmutan con $A$ es un subespacio de $\mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que $I_n \in S$ y que $A^j \in S \ \ \forall j \in \mathbb{N}$.
   (d) Sea $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonal. Caracterizar el conjunto de todas las matrices $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que conmutan con $B$. Considerar primero el caso en que todos los elementos de la diagonal de $B$ sean iguales, luego considerar el caso en que todos los elementos de la diagonal sean distintos entre sí y por último considerar el caso en que algunos de los elementos sean iguales y otros no.
   (e) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con $n \geq 2$ . Probar que el conjunto $\{I_n, A, A^2, A^3, ..., A^{n^2-1}\}$ es linealmente dependiente.
   (f) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $A$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ para que
   a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
   b) $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$
   (g) Probar que si $A$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ no necesariamente vale $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$

5. Sean $A, A' \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ; $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$ ; $D, D' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ; $\alpha \in \mathbb{K}$. Probar:
   (a) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$
   (b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
   (c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
   (d) $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$
   (e) $tr(\alpha D) = \alpha tr(D)$
   (f) $tr(D \cdot D') = tr(D' \cdot D)$. (¿Hace falta que las matrices sean cuadradas?)

6. Sean $A$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$
   (a) Probar que si $A$ y $B$ son triangulares superiores, $A \cdot B$ es triangular superior.

(b) Probar que si $A$ y $B$ son diagonales, $A \cdot B$ es diagonal.
(c) Probar que si $A$ es estrictamente triangular superior, $A^n = 0$.

7. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$
(a) Probar que $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A \cdot A^t \neq A^t \cdot A$.
(b) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?
(c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A \cdot A^t = 0 \iff tr(A \cdot A^t) = 0$

8. Sea $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ y $B\,,\,C \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Probar
(a) $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$
(b) $A \cdot B = 0 \Rightarrow B = 0$

9. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa
(a) $A\,,\,B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \Rightarrow A + B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$
(b) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \iff A^t \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$
(c) $tr(A) = 0 \Rightarrow A \notin \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$
(d) $A$ nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N} \;/\; A^j = 0$) $\Rightarrow A \notin \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$

10. (a) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ fija. Probar que el conjunto $G_A = \{B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) / BAB^t = A\}$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ (es decir, $I_n \in G_A$, si $B \in G_A$ entonces $B^{-1} \in G_A$ y si $B, B' \in G_A$ entonces $B \cdot B' \in G_A$).
(b) Definimos $O_n = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} / B \cdot B^t = I_n\}$. Probar que $O_n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ y es un subgrupo.

11. Para cada $i, j\ (1 \leq i, j \leq n)$, sea $E^{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ la siguiente matriz

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & si\ i = k\ y\ j = l \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

Las matrices $E^{ij}$ se llaman **matrices canónicas** de $\mathbb{K}^{n\times n}$.
(a) Si $a \in \mathbb{K} - \{0\}$ y $1 \leq i \leq n$, se define $M_i(a) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + ... + a \cdot E^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + ... + E^{nn} = I_n + (a-1) \cdot E^{ii}$$

Escribir todas las posibles $M_i(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in \mathbb{K})$
(b) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$. Se define la matriz $P^{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila $i$ con la fila $j$ de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}$$

Escribir todas las posibles $P^{ij}$ para $n = 2, 3, 4$. ¿Cu'antas son las $P^{ij}$ para $n$ general?
(c) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$ y $a \in \mathbb{K}$. Se define la matriz $T^{ij}(a) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + a \cdot E^{ij}$$

Escribir todas las posibles $T^{ij}(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in \mathbb{K})$

Las matrices $M_i(a)$, $P^{ij}$ y $T^{ij}(a)$ se llaman **matrices elementales** de $\mathbb{K}^{n\times n}$.

12. Sean $M_i(a)$, $P^{ij}$ y $T^{ij}(a)$ las matrices elementales de $\mathbb{K}^{n\times n}$. Probar:
(a) $M_i(a) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ con $(M_i(a))^{-1} = M_i(\frac{1}{a})$
(b) $P^{ij} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ con $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$
(c) $T^{ij} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ con $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$

13. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $A = (a_{ij})$ y sea $F_i$ $(1 \leq i \leq n)$ la $i$-ésima fila de A, es decir, $F_i = (a_{i1}, ..., a_{im})$ y $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$.
Sean $E^{ij}$ las matrices canónicas y sean $M_i(a)$, $P^{ij}$ y $T^{ij}(a)$ las matrices elementales de $\mathbb{K}^{n\times n}$. Probar
(a) Si $A' = E^{ij} \cdot A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = (0, ..., 0)$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_j$.
(b) Si $A' = M_i(a) \cdot A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = a \cdot F_i$.

(c) Si $A' = P^{ij} \cdot A$ , entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \notin \{i,j\}$ ; $F'_i = F_j$ y $F'_j = F_i$.

(d) Si $A' = T^{ij}(a) \cdot A$ , entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_i + a \cdot F_j$.

Notar como conclusión de lo anterior que triangular por filas una matriz es multiplicar a izquierda por varias matrices elementales.
¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

14. (a) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calcular $A^{20}$ y $20 \cdot A$
(b) Calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$
(c) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Calcular $B^{20}$ y $20 \cdot B$

15. Averiguar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

16. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $b \in \mathbb{K}^n$
(a) Probar que el sistema $A \cdot x = b$ tiene solución única si y sólo si $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$
(b) Probar que $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ si y sólo si las filas de $A$ son linealmente independientes si y sólo si las columnas de $A$ son linealmente independientes.

17. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones
(a) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.
(b) Existe $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $AB = I_n$.
(c) Existe $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $BA = I_n$.
(d) La única matriz $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que verifica $AC = 0$ es $C = 0$.
(e) La única matriz $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que verifica $CA = 0$ es $C = 0$.

18. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales
(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ , $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3 , x_1 - \frac{1}{2}x_2)$
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ , $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 , 2x_2 , 1 + x_1)$
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ , $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3 , 0 , 3x_2 + 2x_3)$
(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ , $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 , |x_1|)$
(e) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ , $f(z) = iz$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)
(f) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ , $f(z) = i \cdot Im(z)$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)
(g) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ , $f(z) = \overline{z}$ ( como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)
(h) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ , $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
(i) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^3$ , $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (3a_{13} - a_{23} , a_{11} + 2a_{22} - a_{23} , a_{22} - a_{12})$
(j) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$ , $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
(k) $f : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ , $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$ (considerando a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)

19. Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
(a) $f(x, y) = (x, 0)$

(b) $f(x,y)=(0,y)$
(c) $f(x,y)=(x,-y)$
(d) $f(x,y)=(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(x+y))$
(e) $f(x,y)=(-y,x)$
(f) $f(x,y)=(x\cdot\cos t-y\cdot\operatorname{sen}t\,,\,x\cdot\operatorname{sen}t+y\cdot\cos t)$

20. (a) Encontrar una función $f:V\to V$ (para un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $V$ conveniente) que cumpla $f(v+w)=f(v)+f(w)$ para cualquier par de vectores $v\,,\,w\in V$ pero que no sea una transformación lineal.
(b) Encontrar una función $f:V\to V$ (para un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $V$ conveniente) que cumpla $f(k\cdot v)=k\cdot f(v)$ para cualquier escalar $k\in\mathbb{K}$ y cualquier vector $v\in V$ pero que no sea una transformación lineal.

21. Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:
(a) $tr:\mathbb{K}^{n\times n}\to\mathbb{K}$
(b) $t:\mathbb{K}^{n\times m}\to\mathbb{K}^{m\times n}\ ,\ t(A)=A^t$
(c) $f:\mathbb{K}^{n\times m}\to\mathbb{K}^{r\times m}\ ,\ f(A)=B\cdot A$ donde $B\in\mathbb{K}^{r\times n}$
(d) $D:C^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R})\ ,\ D(f)=f'$
(e) $\delta_\alpha:\mathbb{K}[X]\to\mathbb{K}\ ,\ \delta_\alpha(f)=f(\alpha)$ donde $\alpha\in\mathbb{K}$
(f) $s:\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\ ,\ s(\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}})=(0,a_1,a_2,...,a_n,...)$

22. (a) Probar que existe una única transformación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$. Para dicha $f$, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$
(b) ¿Existirá una transformación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1)=(2,6)$ ; $f(-1,1)=(2,1)$ y $f(2,7)=(5,3)$?
(c) Sean $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f(1,0,1)=(1,2,1)$, $f(2,1,0)=(2,1,0)$, $f(-1,0,0)=(1,2,1)$, $g(1,1,1)=(1,1,0)$, $g(2,2,-1)=(3,-1,2)$, y $g(3,2,1)=(0,0,1)$. Determinar si $f=g$.
(d) Hallar todos los $a\in\mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que satisfaga $f(1,-1,1)=(2,a,-1)$ , $f(1,-1,2)=(a^2,-1,1)$ y $f(1,-1,-2)=(5,-1,-7)$

23. (a) Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada tranformación lineal del ejercicio 18. Decidir en cada caso si $f$ es epimorfismo, monomorfismo, isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular $f^{-1}$
(b) Clasificar las transformaciones lineales $tr$ , $t$ , $D$ , $\delta_\alpha$ y $s$ del ejercicio 20 en epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o nada.

24. Sean $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_1+x_3,0,0)$ y $g:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $g(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2,2x_1-x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de $f$, de $g$ y de $g\circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

25. Sean $g:V\to V'$ y f : V$'\to$ V$''$ transformaciones lineales. Probar
(a) $\mathrm{Nu}(g)\subseteq\mathrm{Nu}(f\circ g)$
(b) Si $\mathrm{Nu}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0\}$ , entonces $\mathrm{Nu}(g)=\mathrm{Nu}(f\circ g)$
(c) $\mathrm{Im}(f\circ g)\subseteq\mathrm{Im}(f)$
(d) Si $\mathrm{Im}(g)=V'$ , entonces $\mathrm{Im}(f\circ g)=\mathrm{Im}(f)$

26. (a) Sean $S\,,\,T\subset\mathbb{R}^4$ definidos por

$$S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)/x_1+x_2+x_3=0\}\text{ y }T=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)/2x_1+x_4=0,\ x_2-x_3=0\}.$$

¿Existe algún isomorfismo $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ tal que $f(S)=T$?
(b) ¿Existe algún monomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$?
(c) ¿Existe algún epimorfismo $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$?
(d) Sean $v_1=(1,0,1,0)$, $v_2=(1,1,1,0)$ y $v_3=(1,1,1,1)$. ¿Existe alguna transformación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1,v_2,v_3\}\subset\mathrm{Im}(f)$ ?

27. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ que verifique $\mathrm{Im}(f)=S$ y $\mathrm{Nu}(f)=T$ en los siguientes casos
(a) $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)/x_1+x_2-x_3+2x_4=0\}$ , $T=<(1,2,1)>$
(b) $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)/x_1+x_2=0\ ,\ x_3+x_4=0\}$ , $T=<(1,-2,1)>$

28. En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:
(a) $(1,1,0)\in\mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f))=1$
(b) $\mathrm{Nu}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=<(1,1,2)>$
(c) $f\neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f)\subseteq\mathrm{Im}(f)$
(d) $f\neq 0$ y $f\circ f=0$
(e) $f\neq Id$ y $f\circ f=Id$

(f) $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$ , $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

29. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n$ y sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $V$. Se define la aplicación $\alpha_B : V \to \mathbb{K}^n$ de la siguiente manera

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \ , \ \alpha_B(v) = (x_1, ..., x_n)$$

Probar que $\alpha_B$ es un isomorfismo.

Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación $\alpha_B$ es tomar coordenadas en la base $B$, esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

(a) $\{w_1, ..., w_s\}$ es linealmente independiente en $V \iff \{\alpha_B(w_1), ..., \alpha_B(w_s)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{K}^n$

(b) $\{w_1, ..., w_r\}$ es un sistema de generadores de $V \iff \{\alpha_B(w_1), ..., \alpha_B(w_r)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{K}^n$

(c) $\{w_1, ..., w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_B(w_1), ..., \alpha_B(w_n)\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$

(d) Por ejemplo, para decidir si $\{X^2 - X + 1 \ , \ X^2 - 3X + 5 \ , \ 2X^2 + 2X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$ , bastará ver si $\{(1, -1, 1) \ , \ (1, -3, 5) \ , \ (2, 2, -3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, para lo que se puede usar el método de triangulación.

30. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que $f \circ f = f \iff f(v) = v \ \ \forall v \in \text{Im}(f)$.

Una transformación lineal que cumple esto se llama **proyector**.

31. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla
(a) $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
(b) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
(c) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) =< (1, 1, 1) >$

32. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f : V \to V$ un proyector. Probar
(a) $V = \text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$,
(b) $g = id_V - f$ es un proyector con $\text{Im}(g) = \text{Nu}(f)$ y $\text{Nu}(g) = \text{Im}(f)$.

33. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n$ y sean $S$ y $T$ subespacios de $V$ tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $f : V \to V$ tal que $\text{Nu}(f) = S$ e $\text{Im}(f)= T$.

34. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que $f$ es nilpotente si $\exists\, s \in \mathbb{N} / f^s = 0$
(a) Probar que si $f$ es nilpotente, entonces $f$ no es ni monomorfismo ni epimorfismo.
(b) Si $V$ es de dimensión $n$ probar que $f$ es nilpotente $\iff f^n = 0$ (Sugerencia: considerar si las inclusiones $\text{Nu}(f^i) \subseteq \text{Nu}(f^{i+1})$ son estrictas o no).
(c) Sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $V$. Se define la transformación lineal $f : V \to V$ de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & si \ 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & si \ i = n \end{cases}$$

Probar que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

(d) Si $V = \mathbb{R}^n$, para cada $i$ , $2 \leq i \leq n$ construir una transformación lineal nilpotente $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f^i = 0$ y $f^{i-1} \neq 0$.

35. Sea $S =< (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.
(a) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Nu(f) = S$.
(b) Hallar ecuaciones para $S$ (usar el item anterior)
(c) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $< (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > + (0, 1, 1, 2)$.

36. (a) Sea $S \subseteq \mathbb{K}^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tal que $Nu(f) = S$.
(b) Sea $T \subseteq \mathbb{K}^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ y $x \in \mathbb{K}^n$ tales que $T = f^{-1}(x)$.