Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Práctica 3

Cambio de base. Matrices de transformaciones lineales.

(1) Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ en los siguientes casos:
(a) $V = \mathbb{K}^n$, $v = (x_1, \cdots, x_n)$ y $\mathcal{B}$ la base canónica.
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, 2, -1)$ y $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$.
(c) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1, 2)$ y $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$.
(d) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$.
(e) $V = \mathbb{R}_{<4}[X]$, $v = 2X^2 - X^3$ y $\mathcal{B} = \{3,\ 1 + X,\ X^2 + 5,\ X^3 + X^2\}$.
(f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.
¿Qué cambia si cambiamos el cuerpo a $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{C}$? ¿Y si el cuerpo es $\mathbb{Z}_2$?

(2) (a) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que, $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $A \cdot x = B \cdot x$. Probar que $A = B$.
(b) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ bases de V. Probar que

$$\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

(c) Deducir que $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, con $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

(3) Calcular $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ y $\mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ en los siguientes casos. Calcular las coordenadas de v en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.
(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $\mathcal{B}' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$, $v = (1, 2)$.
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$, $v = (2, 2, 2)$.
(c) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$, $v = (2, 2, 2)$.
(d) $V = \mathbb{R}_{<3}[X]$, $\mathcal{B} = \{3,\ 1 + X,\ X^2\}$, $\mathcal{B}' = \{1,\ X + 3,\ X^2 + X\}$, $v = 1 + X - X^2$.
(e) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\mathcal{B}' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$, $v = \sum_{i=1}^4 i v_i$.
(f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathcal{B} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$, $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = I_2$.

(4) Sean $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Hallar bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ tales que $\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = M = \mathcal{C}(\mathcal{B}'', \mathcal{B})$.

(5) Sean $f : V \to V$ una tranformación lineal y $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases de V. Calcular $||f||_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ en cada uno de los siguientes casos:
(a) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$, $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 3, 1)\}$.
(c) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ es la base canónica de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
(d) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
(e) $V = \mathbb{R}_{<5}[X]$, $f(p) = p'$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.
(f) $V = \mathbb{R}_{<5}[X]$, $f(p) = p'$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.
(g) $V = \mathbb{R}_{<5}[X]$, $f(p) = p'$, $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, $\mathcal{B}' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.
(h) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
(i) V de dimensión n, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \le i \le n-1 \\ 0 & \text{si } i = n. \end{cases}$

(6) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$||f||_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}'$?
(b) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.
(c) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

(7) Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ y $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ las bases canónicas de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ respectivamente. Sea $L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ definida por $L_A(x) = (A \cdot x^t)^t$. Probar que $||L_A||_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = A$.

(8) Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y sea $\mathrm{Hom}(V,W) = \{f : V \to W \mid f \text{ es lineal}\}$.
 (a) Probar que $\mathrm{Hom}(V,W)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con las operaciones naturales.
 (b) Si $\dim V = n$ y $\dim W = m$, sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V y de W respectivamente. Sea

$$T : \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathbb{K}^{m\times n}$$

 la aplicación definida por $T(f) = ||f||_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Probar que T es lineal y que es un isomorfismo. Calcular $\dim(\mathrm{Hom}(V,W))$.

(9) (a) Sean V_1, V_2, V_3 $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión finita con bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ respectivamente. Sea $f : V_1 \to V_2$ y $g : V_2 \to V_3$. Probar que

$$||g \circ f||_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3} = ||g||_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3} \cdot ||f||_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}.$$

 (b) Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}.$$

 (c) Sean V_1, V_2 $\mathbb{K}$-e.v., $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i'$ bases de V_i $(i = 1, 2)$. Sea $f : V_1 \to V_2$ lineal. Probar que

$$||f||_{\mathcal{B}_1'\mathcal{B}_2'} = \mathcal{C}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2') \cdot ||f||_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_1).$$

 (d) Sea V un $\mathbb{K}$-e.v., $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V y $f \in \mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(||f||_{\mathcal{B}'})^n = ||f^n||_{\mathcal{B}'} = \mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot ||f^n||_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = (\mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot ||f||_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{C}(\mathcal{B}', \mathcal{B}))^n.$$

 (a) Encontrar, para cada $n \geq 2$, una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A \neq \mathbf{1}$ y $A^n = \mathbf{1}$.
 (b) Encontrar, para cada $n \geq 2$, una matriz $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ tal que $A \neq \mathbf{1}$ y $A^n = \mathbf{1}$.

(10) Recordemos, para $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, la definición de la *traza de* A, dada por $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Dado V un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión finita n y $f \in \mathrm{End}(V)$, definimos $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(||f||_{\mathcal{B}})$, con $\mathcal{B}$ una base de V. Probar que esta definición tiene sentido (es decir, que no depende de la base $\mathcal{B}$). Probar que $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{K}$ es lineal.

(11) Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $U = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $U' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$||f||_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad ||f||_{UU'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar U'.

(12) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que

$$\big(||f||_{\mathcal{B}}\big)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: elegir $v_1 \notin \mathrm{Nu}(f^{n-1})$).

(13) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que

$$\big(||f||_{\mathcal{B}}\big)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, i \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(14) Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $\dim V = n$ y $\dim W = m$ y $f : V \to W$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que existe una base $\mathcal{B}$ de V y una base $\mathcal{B}'$ de W tal que

$$\big(||f||_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\big)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; i \leq s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(15) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3)$.
 (a) Determinar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$||f||_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices $C, D \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ tales que

$$CAD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(16) Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y sea $S = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\}$. Probar que $\mathrm{rg}(A) + \dim(S) = n$. (Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes)

(b) Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$. Se considera el sistema $A \cdot x = b$ y sea $(A \,|\, b)$ su matriz ampliada. Probar que $A \cdot x = b$ tiene solución $\iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \,|\, b)$.

(17) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Probar que son equivalentes:

(a) $\exists C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}),\ D \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{K})$ tales que $A = CBD$.

(b) Dadas $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ respectivamente, $\exists f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ y bases $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ bases de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ respectivamente tales que $||f||_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = A$ y $||f||_{\mathcal{B}'_1\mathcal{B}'_2} = B$.

(c) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

(18) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que son equivalentes:

(a) $\exists C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $A = CAC^{-1}$.

(b) Dada $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{K}^n$, $\exists f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ y una base $\mathcal{B}'$ tales que $||f||_{\mathcal{B}} = A$ y $||f||_{\mathcal{B}'} = B$.

Comparar con el ejercicio anterior.

(19) Decidir, en los siguientes casos, si existen matrices C, D tales que $A = CBD$:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En los casos en que tales C, D existen, ¿se pueden encontrar de manera que $D = D^{-1}$? (Sug: pensar en la traza)