Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001
Práctica 5
Determinantes

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

2. (a) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz triangular. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$.
   (b) Calcular el determinante de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a) Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times m}$ y $C \in \mathbb{K}^{n\times m}$, sea $M \in \mathbb{K}^{(n+m)\times(n+m)}$ la matriz de bloques definida por $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Probar que $\det(M) = \det(A)\cdot\det(B)$.
   (b) Sean $r_1, r_2, \cdots, r_n \in \mathbb{N}$ y para cada i, $1 \le i \le n$ sea $A_i \in \mathbb{K}^{r_i \times r_i}$. Se considera la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_n \end{pmatrix}$$

   Calcular $\det(M)$.

4. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x & a & a & \ldots & a \\ a & x & a & \ldots & a \\ a & a & x & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots & x \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \ldots & x & x \\ 1 & x & 0 & \ldots & x & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x & x & \ldots & 0 & x \\ 1 & x & x & \ldots & x & 0 \end{pmatrix}$

5. (a) Calcular inductivamente el determinante de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Calcular inductivamente el determinante de la matriz **compañera** $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix}$$

6. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que: (i) $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$, y (ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$. Probar que $\det A > 0$.

7. (a) Denotamos con $V(k_1, k_2, \dots, k_n)$ a la matriz de *Vandermonde*

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & \dots & k_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Recordar que si $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ son escalares distintos, $V(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ resulta inversible. Sea $A = \big(V(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)\big)^t \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$ y sean $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$. Probar entonces que el sistema $A \cdot x = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ tiene solución única $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ y $P = \sum_{i=0}^{n} x_i X^i$ es el polinomio interpolador de Lagrange tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$ $(0 \leq i \leq n)$.

(b) Probar que el conjunto de funciones reales $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\alpha_i \neq \alpha_j$ $\forall i \neq j$. (Sugerencia: evaluar en $0,\ 1, \dots, n-1$). Deducir que el espacio vectorial $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tiene dimensión infinita.

8. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^3 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix}$

9. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11}+2a_{13} & a_{21}+2a_{23} & a_{31}+2a_{33} \end{pmatrix}.$$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B = (b_{ij})$ una matriz tal que $\det(A+B) = \det(A-B)$. Probar que B es inversible si y sólo si $b_{11} \neq b_{21}$.

11. (a) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$. Probar que el sistema $A \cdot x = 0$ tiene solución única si y sólo si a, b, c y d no son todos iguales a cero.

(b) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

12. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $r \in \mathbb{K}$. Probar que existe $x \neq 0$ en $\mathbb{K}^n$ tal que $A \cdot x = r \cdot x$ si y sólo si $\det(A - r \cdot I_n) = 0$.

13. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

14. Sea A una matriz inversible. Calcular $\det(\operatorname{adj} A)$. ¿Qué pasa si A no es inversible?

15. (a) Resolver los siguientes sistemas lineales sobre $\mathbb{Q}$ empleando la regla de Cramer:

(i) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

(b) Resolver el siguiente sistema lineal sobre $\mathbb{Z}_7$ empleando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ x + z = 6 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

16. Sea $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $\det(A) = 1$ ó $\det(A) = -1$. Probar que para todo $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$, existe un único $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que $A \cdot x = b$.

17. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Se sabe que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & e & f \\ 5 & h & i \end{pmatrix} = 0, \qquad \det\begin{pmatrix} a & 2 & c \\ d & 4 & f \\ g & 10 & i \end{pmatrix} = 0, \qquad \det\begin{pmatrix} a & b & -1 \\ d & e & -2 \\ g & h & -5 \end{pmatrix} = 0.$$

Calcular $\det A$.

18. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

(a) Probar que son equivalentes: (a) $\operatorname{rg}(A) \geq s$; (b) A admite una submatriz de $s \times s$ con determinante no nulo.

(b) Deducir que

$$\operatorname{rg}(A) = \text{máx}\{s \in \mathbb{N}_0 \mid A \text{ admite una submatriz de } s \times s \text{ con determinante no nulo}\}.$$

19. (a) Sea $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ no inversible tal que $A_{11}A_{33} \neq A_{13}A_{31}$. Calcular la dimensión de $S = \{x \in \mathbb{K}^3 \mid A \cdot x = 0\}$.

(b) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ no inversible tal que $\operatorname{adj}(A) \neq 0$. Calcular $\operatorname{rg}(A)$ y $\operatorname{rg}(\operatorname{adj} A)$.

20. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Si $\mathcal{B} \subset V$ es una base, se considera $\det(||f||_{\mathcal{B}})$. Probar que no depende de la base, y por lo tanto tiene sentido hablar del determinante de f. ¿Qué pasa con una t.l. $f : V \to W$?

21. (a) Calcular el área del paralelogramo generado por los vectores $(2, 1)$ y $(-4, 5)$

(b) Mismo problema para $(3, 4)$ y $(-2, -3)$

(c) Calcular el área de un paralelogramo tal que 3 de sus vértices están dados por los puntos $(1, 1)$, $(2, -1)$ y $(4, 6)$

(d) Calcular el volumen del paralelepípedo generado por $(1, 1, 3)$, $(1, 2, -1)$ y $(1, 4, 1)$

(e) Mismo problema para $(-2, 2, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(-4, 3, 2)$.

22. Se tiene: una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; un subconjunto acotado $X \subset \mathbb{R}^2$ dibujado; el dibujo de $f(X)$; un programa de computadora que dada una base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ y dados $f(v_1), f(v_2)$, calcula la matriz de f en la base canónica. El programa tiene el defecto de que trabaja con aproximaciones de los números,

y para calcular un cociente $\frac{a}{b}$ comete un error más grosero cuanto menor es $|b|$. ¿Cómo conviene elegir los puntos v_1 y v_2 del dibujo X para que el cálculo de f sea lo más acertado posible?

23. (a) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{6\times 6}$. ¿Con qué signos aparecen los siguientes productos en $\det(A)$?:
    (i) $a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{14} \cdot a_{65}$
    (ii) $a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{51} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$
    (b) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{5\times 5}$. Elegir todos los posibles valores de j y de k tales que el producto $a_{1j} \cdot a_{32} \cdot a_{4k} \cdot a_{25} \cdot a_{53}$ aparezca en $\det(A)$ con signo $+$
    (c) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{4\times 4}$. Escribir todos los términos de $\det(A)$ que tengan al factor a_{23} y signo $+$
    (d) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de X^4 y de X^3 en

$$\det\begin{pmatrix} 2X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}$$

    (e) Sin calcular el determinante, calcular el coeficiente de a^6 y el de b^6 en

$$\det\begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Sean $A,\ B,\ C,\ D \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Sea $M \in \mathbb{K}^{2n\times 2n}$ la matriz de bloques $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Probar que si $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, $\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$. Si además $AC = CA$ entonces $\det(M) = \det(AD - BC)$.

25. Recordar la *Resultante* entre dos polinomios: un determinante que dice si los polinomios tienen un factor en común o no. Encontrar, dado un polinomio, una forma de saber si tiene raíces dobles o no. Encontrar una expresión explícita, en función de los coeficientes, para el caso de un polinomio de grado 2 y de grado 3.