Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Práctica 6

Autovalores y Autovectores. Diagonalizacion (Primera Parte).

(1) Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos. Analizar por separado los casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(iii) } A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R})$$

$$\text{(iv) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(v) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(vi) } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R})$$

$$\text{(vii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R}) \quad \text{(viii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(ix) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Para cada una de las matrices A del ejercicio anterior, sea U una base de $\mathbb{K}^n$ y sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ la tranformación lineal tal que $||f||_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de $\mathbb{K}^n$ tal que $||f||_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(U, B)$.

(3) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 2.y + 2.z, y, -x - 3.y - 4.z)$$

Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $||f||_B$ sea diagonal.

(4) (a) Sean A, C y $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $A = DCD^{-1}$. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n = DC^nD^{-1}$.

(b) Calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

(c) ¿ Existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$?

(5) (a) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Determinar todos los a , b y $c \in \mathbb{K}$ para los que A es diagonalizable.

(b) Probar que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

(6) Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: no intentar calcular el polinomio característico.

(7) Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene a $(1, -1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$ y, además, $\mathcal{X}_A \in \mathbb{Q}[X]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿Es A única?

(8) (a) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2.A$ son -1, 3 y 8.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3.I_4$. Hallar los restantes autovalores de A.

(9) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

(10) Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector correspondiente.

(11) Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un proyector con dim(Im(f))=s. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?

(12) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo incluido en $\mathbb{C}$ y sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un morfismo nilpotente. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?

(13) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que verifica $A^2 + I_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.

(14) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

(15) Sea $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz inversible y diagonal. Sea $f : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ la transformación lineal definida por $f(A) = D^{-1}AD$. Hallar los autovalores y los autovectores de f y probar que es diagonalizable.

(16) Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de $\mathbb{C}^n$ tal que $||f||_B$ es triangular superior.

(17) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ las raíces de $\mathcal{X}_A$ contadas con multiplicidad. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ y que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(18) Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$.

(a) Probar que las matrices $\begin{pmatrix} A.B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & B.A \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}$ son semejantes.

(b) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{A.B} = \mathcal{X}_{B.A}$