Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Práctica 7

Diagonalizacion (Segunda Parte).

(1) Dadas las siguientes matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$.

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ (a)\ P = X - 1\ ,\ \ (b)\ P = X^2 - 1\ ,\ \ (c)\ P = (X-1)^2$$

$$(ii)\ A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\ ,\ P = X^3 - i.X^2 + 1 + i$$

(2) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sean P y $Q \in \mathbb{K}[X]$.
- (a) Si $a\,,\, b \in \mathbb{K}$, probar que $(a.P + b.Q)(A) = a.P(A) + b.Q(A)$
- (b) Probar que $(P.Q)(A) = P(A).Q(A)$.
- (c) Probar que $P^n(A) = (P(A))^n$
- (d) ¿Es cierto que $P(A).Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ó $Q(A) = 0$?
- (e) Si P y Q coprimos y $x \in \mathbb{K}^n$ es tal que $P(A).x = Q(A).x = 0$, probar que $x = 0$

(3) Sean $A\,,\, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que si A y B son semejantes, entonces $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$. ¿Vale la recíproca?

(4) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

(5) Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el característico):

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(6) Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:
- (a) $f : \mathbb{R}_{<3}[X] \to \mathbb{R}_{<3}[X]\,,\ f(P) = P' + 2.P$
- (b) $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}\,,\ f(A) = A^t$

(7) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular sus polinomios minimal y característico.

(8) Sea $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal derivada. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.

(9) Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:
- (a) Calcular $A^4 - 4.A^3 - A^2 + 2.A - 5.I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- (b) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (c) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.
- (d) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2.A^4 - 12.A^3 + 19.A^2 - 29.A - 37.I_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de I_2.
- (e) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1} , A^3 y A^{-3}

(f) Calcular $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(10) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

(11) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^2 + I_n = 0$.

(12) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$ y $S \oplus T = V$. Si S y T son f-invariantes, probar que existe una base B de V y matrices $A_1 \in \mathbb{K}^{s\times s}$ y $A_2 \in \mathbb{K}^{t\times t}$ tales que

$$||f||_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Probar que, en este caso, $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{A_1}.\mathcal{X}_{A_2}$. ¿Pasa lo mismo con los minimales?

(13) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3.y, 3.x - 2.y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

(14) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ. Probar que, para todo $\theta \neq k.\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

(15) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz en la base canónica es

$$||g_\theta||_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ-invariantes.

(16) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^m = I_n$. Probar que es diagonalizable. ¿Cuántas clases de conjugación hay de tales matrices?

(17) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una tranformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f-invariante pero que no admite un complemento f-invariante.

(18) (a) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.
(b) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.

(19) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que si A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_A(X) = X^k$. Calcular todos los autovalores de A. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y el único autovalor de A es el 0, probar que A es nilpotente. ¿Qué pasa si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(20) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de traza nula. Probar que A es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.

(21) Sea $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ un isomorfismo de espacios vectoriales que además verifica que $f(AB) = f(A)f(B)$.
(a) Probar que $f(I_n) = (I_n)$.
(b) Probar que existe $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible tal que el morfismo f está definido por $f(A) = TAT^{-1}\ \forall A$.