Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Práctica 9

Variedades Lineales

(1) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v\,,\,w\,\in\,V;\ v\neq w$. Sea $S=<v-w>$ y sea $M=v+S$. Probar la validez de las siguientes afirmaciones:
  (a) v y w están en M.
  (b) $M=w+S$
  (c) Si $M'\subseteq V$ es una variedad lineal tal que $v\,,\,w\,\in M'$ entonces $M\subseteq M'$.
  (d) $M=\{\lambda.w+\mu.v\,/\,\lambda\,,\,\mu\,\in\mathbb{K};\ \lambda+\mu=1\}$

(2) Probar que cada uno de los siguientes conjuntos son variedades lineales y calcular su dimensión
  (a) $M_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,/\,2.x_1-x_3=1\quad\text{y}\quad x_2+x_3=-2\}$
  (b) $M_2=\{(1,2,3)\}\subseteq\mathbb{R}^3$
  (c) $M_3=\{P\in\mathbb{Q}_{<4}[X]\,/\,P'(2)=0\}$
  (d) $M_4=\{A\in\mathbb{C}^{2\times2}\,/\,tr(A)=5\}$

(3) (a) Sea $L\subseteq\mathbb{R}^3$ la recta que pasa por los puntos $(2,-1,0)$ y $(1,3,-1)$. Hallar una variedad lineal M de dimensión 2 que contenga a L. ¿Es M única?
  (b) Sea $\Pi=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,/\,2.x_1-x_2+x_3=1\}$ y sea $L=<(0,1,1)>+(1,1,0)$. Hallar una variedad lineal $M\subseteq\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que $M\cap\Pi=L$.

(4) Determinar la dimensión de la variedad lineal

$$M=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/x_1-x_2+3.x_3=0\,,\,2.x_1+x_2+x_3=1\,,\,-x_1+x_2+a.x_3=0\}$$

de acuerdo a los distintos valores de $a\in\mathbb{R}$.

(5) Hallar ecuaciones implícitas para las siguientes variedades lineales:
  (a) $M=<(1,2,1),(2,0,1)>+(1,1,1)\subseteq\mathbb{R}^3$.
  (b) $M\subseteq\mathbb{R}^4$ la mínima variedad que contiene a $(1,1,2,0)$, $(2,1,1,0)$ y $(-1,0,4,1)$.

(6) (a) Sea $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ y sea $b\in\mathbb{K}^m$ tal que $\mathrm{rg}(A|b)=\mathrm{rg}(A)$. Probar que las soluciones de la ecuación $A.x=b$ forman una variedad lineal y calcular su dimensión. ¿Qué pasa si $\mathrm{rg}(A)\neq\mathrm{rg}(A|b)$?
  (b) Sea $M\subseteq\mathbb{K}^n$ una variedad lineal. Probar que existe $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ y $b\in\mathbb{K}^m$ para algún m conveniente tal que $M=\{x\in\mathbb{K}^n/A.x=b\}$.
  (c) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, B una base de V y $M\subseteq V$ una variedad lineal. Deducir de lo anterior que las coordenadas de los elementos de M en la base B son exactamente las soluciones de algún sistema lineal de ecuaciones.

(7) Sea $L=<(2,1,1)>+(0,-1,1)\subseteq\mathbb{R}^3$.
  (a) Hallar un plano P tal que $0\in P$ y $L\subseteq P$.
  (b) ¿Existirá un plano P' tal que $L\subseteq P'$, $0\in P'$ y $(0,0,1)\in P'$ simultáneamente?

(8) Encontrar en $\mathbb{R}^3$ dos rectas alabeadas que pasen por $(1,2,1)$ y $(2,1,1)$ respectivamente. Encontrar en $\mathbb{R}^4$ dos planos alabeados que pasen por $(1,1,1,0)$ y $(0,1,1,1)$ respectivamente. ¿Hay planos alabeados en $\mathbb{R}^3$? Más generalmente, si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y M_1 y M_2 son variedades lineales alabeadas en V ¿qué se puede decir de sus dimensiones?

(9) En cada uno de los siguientes casos, decidir si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, son paralelas o alabeadas. En cada caso, hallar $M_1\cap M_2$ y calcular las dimensiones.
  (a) $M_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/x_1+x_2-x_3=1\}$
  $M_2=<(1,0,1)>+(0,0,-3)$
  (b) $M_1=<(1,2,1,0),(1,0,0,1)>+(1,2,2,-1)$
  $M_2=<(1,0,1,1),(2,2,1,0)>+(-1,4,2,-3)$
  (c) $M_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4/x_1-x_2-1=x_3+x_4=0\}$
  $M_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4/x_1-x_2=x_2+x_3+x_4-1=0\}$

(10) Dados dos puntos en el plano (x_1,y_1), (x_2,y_2), encontrar un tercer punto (x_3,y_3) tal que los tres sean los vértices de un triángulo equilátero.