Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Recuperatorio del primer Parcial

1. Sean $n-1$ vectores l.i. $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ en $\mathbb{K}^n$ con coordenadas $v_j = (\alpha_{j,1}, \alpha_{j,2}, \dots, \alpha_{j,n})$. Para $1 \leq i \leq n$ se define $\beta_i = (-1)^i \det(A_i)$, donde

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1,i-1} & \cdots & \alpha_{n-1,i-1} \\ \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{n-1,i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1,n} & \cdots & \alpha_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

   Probar que el espacio de soluciones de la ecuación $\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n = 0$ es $< v_1, \dots, v_{n-1} >$. (Sugerencia: escribir $\sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ como un determinante de $n \times n$.)

2. Sean dos matrices $A, B \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ diagonalizables que conmutan. Probar que cualquier combinación lineal $\alpha A + \beta B$ es diagonalizable. Encontrar A, B diagonalizables que no conmuten y una combinación lineal que no sea diagonalizable.

3. Sean los subespacios de $\mathbb{K}^3$

$$S = < (1,2,0), (0,2,1) >, \qquad T = \begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 0 \end{cases}.$$

   Encontrar todos los isomorfismos $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ tales que S y T resultan invariantes.

4. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita y $f : V \to W$ una transformación lineal.
   (a) Probar que f es monomorfismo si y solo si existe $g : W \to V$ tal que $gf = Id_V$.
   (b) Hallar una tal g que cumpla (a) si $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ es la transformación lineal cuya matriz en las bases canónicas E_2 y E_3 es

$$||f||_{E_2 E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Exhibir la matriz de g en las respectivas bases canónicas.

5. Sean $\phi_1, \phi_2 \in (\mathbb{R}^3)^*$ definidas por $\phi_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + x_2$ y $\phi_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 + x_3$ y sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ el subespacio $S = < (2,3) >$. Hallar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineal tal que $\mathrm{Nu}(f^t) = < \phi_1, \phi_2 >$ e $\mathrm{Im}(f^t) = S^\circ$.