Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2001

Primer Recuperatorio del segundo Parcial

(1) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Para cada $v \in V$ se tiene $\Phi_v \in V^*$ definida por $\Phi_v(w) =< v, w >$ $(w \in V)$. Sea $\psi : V \to V^*$ el isomorfismo definido por $\psi(v) = \Phi_v$, es decir $\psi(v)(w) =< v, w >$.

(a) Probar que si S es un subespacio de V, entonces $\psi(S^\perp) = S^\circ$.

(b) Sea W otro $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to W$ lineal. Sea $f^t : W^* \to V^*$ la traspuesta de f. Probar que $\mathrm{Im}(f^t) = \psi((\mathrm{Nu}\, f)^\perp)$.

(2) Dadas $f, g \in (\mathbb{R}^n)^*$, se define $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $\psi(x) = f(x)g(x)$. Probar que es una forma cuadrática. Encontrar la forma bilineal asociada $\Phi(x, y)$ y describir su radical.

(3) (a) Si $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tiene un polinomio característico que divide a $(X+1)^2X^2(X-1)$, describir sus posibles formas de Jordan.

(b) Encontrar la forma de Jordan de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, sabiendo que está en las condiciones del ítem anterior.

(4) Sea V un espacio real con producto interno. Dado $v \in V$, se define $\alpha_v : V \to V$ por

$$\alpha_v(w) = w - 2\frac{< v, w >}{< v, v >}v.$$

Probar que α_v es una simetría con respecto a un hiperplano. ¿Cuál es ese hiperplano?

(5) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ un endomorfismo. Dado $v \in V$ tal que $\{v, f(v), \dots, f^{r-1}(v)\}$ es linealmente independiente y $f^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i f^i(v)$, se define el polinomio $m_v \in K[X]$ como

$$m_v = X^r - \sum_{i=0}^{r-1} a_i X^i$$

Notar que $m_v(f)(v) = 0$.

(a) Probar que si $p \in K[X]$ es un polinomio tal que $p(f)(v) = 0$, entonces m_v/p. En particular m_v/m_f.

(b) Hallar m_v para el caso $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_2 - x_3, x_2 + x_3)$ con $v = (0, 1, 0)$.