Algebra Lineal. Primer parcial.

2do. Cuatrimestre 2001

1. (a) Sea V un k-espacio vectorial, f, g dos elementos de V^*, demuestre que si $\mathrm{K}er(f) \subseteq \mathrm{K}er(g)$ entonces existe $\lambda \in k$ tal que $f = \lambda g$.

   (b) Sea $V = k^{n\times n}$. Calcular $\dim \langle AB - BA \; : \; A, B \in V\rangle$ (sugerencia: calcular $E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}$, donde las E_{ij} recorren la base canónica de las matrices).

   (c) Sea $f \in (k^{n\times n})^*$ tal que $f(AB) = f(BA)$ para todo par de matrices A, B. Es cierto que necesariamente $f = \lambda.tr$ para algun $\lambda \in k$?

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{<3}[x]$ la transformación lineal determinada por

$$\begin{array}{lc} f(1,1,1) = & 1 + ax + 2x^2 \\ f(0,1,0) = & -1 - bx + (a^2-2)x^2 \\ f(-1,0,1) = & 1 + bx + ax^2 \end{array}$$

   (a) Hallar todos los a, b tales que f es un isomorfismo.

   (b) Para $a = b = 1$ hallar T subespacio de $\mathbb{R}_{<3}[x]$ tal que $\mathbb{R}_{<3}[x] = T \oplus \mathrm{I}m(f)$

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $f, g \in \mathrm{E}nd_k(V)$ tales que $(f+g)$ es inversible y $f \circ g = 0$. Demuestre:

   (a) $\mathrm{I}m(f) = \mathrm{I}m(f^2)$, y deducir que $\mathrm{I}m(f) \cap \mathrm{K}er(f) = 0$.

   (b) Usar fórmulas de dimensión para concluir que $\mathrm{r}g(f+g) = \mathrm{r}g(f) + \mathrm{r}g(g)$.

   Nota: Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, recordamos que $\mathrm{r}g(T)$ se define como $\mathrm{r}g(T) = \dim(\mathrm{I}m(T))$.

4. Sea V un k-espacio vectorial, f, g, h tres elementos de V^*, demostrar que la transformación lineal $T : V \to k \times k \times k$ definida por $T(v) = (f(v), g(v), h(v))$ es un epimorfismo si y sólo si el conjunto $\{f, g, h\}$ es l.i.