Algebra Lineal. Segundo Parcial.

2do. Cuatrimestre 2001

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in k^{3\times 3}$ donde $a,\ b,\ c\ \in k$. Encontrar, en términos de a, b y c una matriz $B \in k^{3\times 3}$ tal que $B^3 = A$. (Sugerencia: escribir A en la forma $Id + N$).

2. Considerar la matriz con coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Porqué es diagonalizable? La transformación lineal asociada, tiene núcleo no trivial? por qué?
   - Hallar una base de $\mathrm{K}er(A)$ y $\mathrm{K}er(A)^{\perp}$ (considerando el producto escalar usual de $\mathbb{R}^4$).
   - Escribir la transformación lineal asociada a A en la base anterior. Cuáles son los autovalores de A?
   - Calcule e^A.

3. Sean A y B dos matrices en $\mathbb{C}^{4\times 4}$ tales que $m_A = m_B$ y $\chi_A = \chi_B$. ¿es cierto que A es conjugada a B? En caso afirmativo demostrarlo, en caso negativo encuentre un contraejemplo.

4. Sea $V = \mathcal{C}[-1,1]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
   (a) Considerar el subespacio S generado por las funciones 1, t, t^2, t^3. ¿Es $\{1,t,t^2,t^3\}$ un conjunto ortogonal? ortonormal? Si no, encontrar una base ortonormal de S.
   (b) Sabiendo que el vector v_S de un subespacio S que esta a distancia mínima de otro vector arbitrario v es la proyección ortogonal de v en S, encuentre el polinomio de grado 3 más cercano a la función e^t.