Algebra Lineal
2do. cuatrimestre 2001

Práctica 4

Funciones bilineales, multilineales, grupo simétrico, determinantes.

1. Sea V un espacio vectorial, demostrar que la función $E : V^* \times V \to k$ definida por $E(\phi, v) := \phi(v)$ es bilineal ($\phi \in V^*$, $v \in V$).

2. Sean V y W dos espacios vectoriales, considerar $\mathrm{Bil}(V \times V, W)$, $\mathrm{Alt}(V \times V, W)$ y $\mathrm{Sim}(V \times V, W)$ los conjuntos de aplicaciones respectivamente bilineales, bilineales alternadas (o antisimétricas) y bilineales simétricas. Es decir, $\mathrm{Alt}(V \times V, W) = \{f \in \mathrm{Bil}(V \times V, W)$ tal que $f(v, v') = -f(v', v)\ \forall v, v' \in V\}$ y $\mathrm{Sim}(V \times V, W) = \{f \in \mathrm{Bil}(V \times V, W)$ tal que $f(v, v') = f(v', v)\ \forall v, v' \in V\}$. Demuestre que $\mathrm{Bil}(V \times V, W) = \mathrm{Alt}(V \times V, W) \oplus \mathrm{Sim}(V \times V, W)$.

3. Sea $V = k^n$, $W = k^m$, y $A \in k^{n \times m}$ una matriz cualquiera. Probar que la función $f_A : V \times W \to k$ definida por
$$f_A(v, w) := v.A.w^t$$
es bilineal. Si $n = m$ demuestre que f_A es simétrica si y sólo si A es una matriz simétrica (i.e. $A^t = A$); f_A es antisimétrica si y sólo si la matriz A es antisimétrica (i.e. $A^t = -A$).

4. Sea $r \in S_3$ la permutación definida por $r(1) = 2$, $r(2) = 3$, $r(3) = 1$. Qué signo tiene r? Considerar s la permutación definida por $s(1) = 2$, $s(2) = 1$ y $s(3) = 3$. Qué signo tiene s? Probar que $S_3 = \{Id, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Calcular el signo de cada una de las permutaciones de S_3.

5. Sean V y W dos espacios vectoriales, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$. Calcular las dimensiones de $\mathrm{Bil}(V \times V, W)$, $\mathrm{Alt}(V \times V, W)$, $\mathrm{Sim}(V \times V, W)$, $\mathrm{Tril}(V \times V \times V, W)$, $\mathrm{Alt}(V \times V \times V, W)$ y $\mathrm{Sim}(V \times V \times V, W)$ en función de n y m.

6. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:
$$i)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad ii)\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \qquad iii)\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$
$$iv)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad v)\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\,\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

7. (a) Sea $A = (a_{ij})_{ij} \in k^{6\times 6}$. Determinar el signo con el que aparecen los siguientes productos en el desarrollo del determinante de A:
$$a)a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65} \qquad\qquad b)a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$$
   (b) Sea $A = (a_{ij})_{ij} \in K^{4\times 4}$. Escribir todos los términos en el desarrollo del determinante de A con signo ***positivo*** y donde aparezca el factor a_{23}.
   (c) Calcular los coeficientes de X^4 y de X^3 sin desarrollar el determinante:
$$\det\begin{pmatrix} 2X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}$$
   (d) Calcular los coeficientes de a^6 y de b^6 sin desarrollar el determinante:
$$\det\begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Escribir explícitamente las seis permutaciones de grado 3, decir cuáles son pares y cuáles impares (recordar el ejercicio 3), y usar esto para dar una fórmula completa del determinante de una matriz de orden 3.

9. Sea $A = (a_{ij})_{ij} \in k^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_i a_{ii}$.

10. Sean $A \in k^{m\times m}$, $B \in k^{n\times n}$ y $C \in k^{m\times n}$, y sea $M \in k^{(m+n)\times(m+n)}$ la matriz de bloques $M := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Probar que $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

11. Sean $r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{N}$, y $A_i \in k^{r_i \times r_i}$ para $1 \leq i \leq s$. Sea $M := \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$. Probar que $\det M = \prod_i \det A_i$

12. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$, y sea $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ la *matriz de van der Monde* asociada a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Probar que $\det V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i)$. **Sugerencia:** Considerar al determinante de $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, t)$ como un polinomio en t.

13. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ escalares distintos, y sea $A := V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in k^{n\times n}$ la matriz de van der Monde. Sean $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in k^n$, y sea $x := (x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ la solución (única) del sistema $Ax = \beta$. Probar que $P(x) := \sum_{i=1}^{n-1} x_i x^{i-1}$ es el polinomio interpolador de Lagrange de grado menor o igual a $n-1$ tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$, $1 \leq i \leq n$

14. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i \neq j$. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, ..., e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

    Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.

15. Calcular el determinante, la inversa y la adjunta de las siguientes matrices:

$$i)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad ii)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad iii)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

16. Sea $A \in k^{n\times n}$. Calcular $\det(\operatorname{adj} A)$.

17. Sea $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Probar que existe $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $AB = \mathrm{Id}$ si y sólo si $\det A = \pm 1$.

18. (a) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{Q}$ empleando la regla de Cramer.

$$i)\ \begin{aligned} 3x - 2y &= 2 \\ 6x + y &= 3 \end{aligned} \qquad ii)\ \begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 10 \\ 3x + 7y + 4z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

$$iii)\ \begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ x - y - z - w &= 4 \\ 5x + y - 3z + 2w &= 0 \end{aligned}$$

    (b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{Z}_7$ empleando la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 1 \\ x + z &= 6 \\ 2x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

19. Calcular los siguientes determinantes:

$$i)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad ii)\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

20. Sea $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0 \in k[t]$. Calcular el determinante de la *matriz compañera* de f:

$$M_f(t) := \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

21. Sean $a_1, \ldots, a_n \in k$. Probar $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} = f(\epsilon_1)\cdots f(\epsilon_n)$, donde $f(t) := a_1 + \ldots + a_n x^{n-1}$ y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \mathbb{C}$ son las raices n–ésimas de 1. **Sugerencia:** Multiplicar por el determinante de la matriz de van der Monde $\begin{pmatrix} 1 & \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_1^{n-1} \end{pmatrix}$

22. Sea $A := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Probar que el sistema $Ax = 0$ tiene solución única si y sólo si $(a, b, c, d) \neq 0$. Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$

23. Sean $A \in k^{n\times n}$, $\alpha \in k$. Probar que existe $v \in k^n - \{0\}$ tal que $Av = \alpha v$ si y sólo si $\det(A - \alpha Id) = 0$.

24. (a) Calcular el área del paralelogramo generado por los vectores (2,1) y (-4,5).
    (b) Calcular el área de un paralelogramo tal que 3 de sus vértices están dados por los puntos (1,1), (2,-1) y (4,6).
    (c) Calcular el volumen del paralelepípedo generado por (1,1,3), (1,2,-1) y (1,4,1).

25. (a) Recordamos que una matriz $A \in k^{n\times n}$ se dice *antisimétrica* si $A^t = -A$. Probar que si A es antisimétrica y n es impar entonces $\det A = 0$.
    (b) Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$(resp. $\in \mathbb{C}^{n\times n}$) se dice *ortogonal* (resp. *unitaria*) si $AA^t = \mathrm{Id}$ (resp. $A\bar{A}^t = \mathrm{Id}$). Probar que si A es ortogonal (resp. unitaria) entonces $\det A = \pm 1$ (resp. $|\det A| = 1$).

26. Sean $V := k^{n\times n}$, $B \in V$, y sea T_B el operador lineal definido como $T_B(A) := [B, A] = BA - AB$.

27. Sean $A = (a_{ij})_{ij} \in k^{m\times m}$, $B = (b_{ij})_{ij} \in k^{n\times n}$, y sea $A \otimes_k B := (a_{ij}b_{kl})_{(i,k),(j,l)} \in k^{mn\times mn}$ Esta matriz es el *producto tensorial* de A y B. Probar que $\det(A \otimes_k B) = (\det A)^n(\det B)^m$