Algebra Lineal

2do. Cuatrimestre 2001

Práctica 5

Autovalores, autovectores, diagonalización.

1. Hallar el polinomio característico, autovalores y autovectores de las matrices siguientes, tomando como cuerpo de base $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ cuando tenga sentido. En los casos que se pueda, hallar P inversible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal. ¿Es única P?

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Se tiene una transformación lineal con una base de autovectores. ¿Cómo es la matriz de la transformación en esa base?

3. (a) Sea $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{V})$. Probar que un espacio f-invariante es también f^{-1}-invariante.
   (b) Sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{V})$, y sea S un subespacio f-invariante. Probar que $f(S)$ y $f^{-1}(S)$ son espacios f-invariantes. ($f^{-1}(S) = \{v \in \mathbb{V} | f(v) \in S\}$.)

4. (a) Probar que una t.l. en un espacio vectorial complejo tiene un vector propio.
   (b) Probar que una t.l. en un espacio vectorial real de dimensión impar tiene un vector propio.
   (c) Encontrar un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que no tenga vectores propios. Una vez encontrado, tomar el endomorfismo de $\mathbb{C}^2$ que tiene la misma matriz y diagonalizarlo. ¿Por qué es seguro que se diagonaliza?

5. Diagonalizar a ojo las siguientes matrices: ("a ojo" quiere decir "sin calcular el polinomio característico".)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Sean ψ y ϕ dos endomorfismos de un espacio vectorial que conmutan (o sea $\psi\phi = \phi\psi$). Probar que si uno de ellos tiene una base de autovectores asociados a autovalores distintos dos a dos entonces la misma base sirve para diagonalizar al otro.

7. (Cartan) Dada una matriz $A \in M_3(\mathbb{C})$, sea $\phi_A : M_3(\mathbb{C}) \to M_3(\mathbb{C})$, $\quad \phi_A(B) = AB - BA$. Probar que si A y A' conmutan entonces ϕ_A y $\phi_{A'}$ también conmutan. Encontrar una base donde diagonalizar a la vez ϕ_A y $\phi_{A'}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. (a) Probar que si $A^2 = A$ entonces A se diagonaliza con 0 y 1.
   (b) Si $A^2 = I$, se diagonaliza con 1 y -1.
   (c) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $A^2 = -I$ entonces A es inversible, no tiene autovalores reales y n es par.

9. Sea $A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ una matriz de bloques. Probar que $\chi_A = \chi_{A_1}\chi_{A_2}$.

10. Probar que dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico. ¿Es cierta la recíproca?

11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad f((x, y, z)) = (-x - 2y + 2z, y, -3x - 3y + 4z)$. Diagonalizar f. Probar que si $A, D, P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ son matrices tales que P es inversible y $A = P^{-1}DP$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ vale
$$A^n = P^{-1}D^nP.$$
Calcular la matriz de f^n. Calcular, si existe, un morfismo g tal que $g^2 = f$.

12. Sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{V})$, y p un polinomio. Sea v un autovector de f asociado al autovalor λ. Probar que v es un autovector del endomorfismo $p(f)$ asociado al autovalor $p(\lambda)$.

13. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión n que tiene n autovalores distintos dos a dos. Probar que existen exactamente 2^n subespacios f-invariantes. *Sugerencia:* usar van der Monde. Si no lo usa, sospeche.

14. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo donde tengan distintos autovectores.

15. Dada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Determinar todos los a, b, c tales que A es diagonalizable.

16. Sea $D \in M_n(\mathbb{K})$ una matriz diagonal e inversible. Sea $\psi : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $\quad \psi(A) = D^{-1}AD$. Hallar los autovalores y autovectores de f y probar que f se diagonaliza.

17. Dimensión infinita:
   (a) Sea $A : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\quad A(f) = f'$. Probar que todos los números reales son valores propios de A.
   (b) Sea $B : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\quad B((x_1, x_2, \ldots)) = (x_2, x_3, \ldots)$. Probar lo mismo con B.
   (c) Sea $C : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\quad C((x_1, x_2, \ldots)) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Calcular los valores propios.

18. (a) Sea $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Probar que los coeficientes de F^n son términos de la sucesión de Fibonacci. Calcular exactamente cuáles son.
   (b) Ver que F se diagonaliza.

(c) Calcular F^n. Obtener una fórmula para el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci.

19. Se tiene una población de zorros y una de gallinas. Si no existiesen los zorros, la población de gallinas aumentaría con una tasa de $1,2$ por día. Como los zorros existen, hay que considerar que cada zorro come una cantidad β de gallinas por día (β un número real positivo). Con esto, si en el día n G_n es la cantidad de gallinas y Z_n la cantidad de zorros, entonces $G_{n+1} = 1,2G_n - \beta Z_n$. Por otro lado, la población de zorros cambia según la regla $Z_{n+1} = 0,6Z_n + 0,5G_n$. Estudiar cómo varían las poblaciones si se empieza con 100 zorros y 1000 gallinas. Hacerlo para $\beta = 0,1$ y $\beta = 0,18$. Suponiendo que este modelo fuera exacto, y considerando que con el paso de los años sigue habiendo zorros y gallinas y las poblaciones tampoco crecieron en forma desmedida, ¿cuál es exactamente β? ¿Cuál es la proporción entre las poblaciones?

20. Mirando la primera parte del ejercicio 17, resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales

    (a) $\begin{cases} f'(x) &= 3f(x) + 2g(x) \\ g'(x) &= -4f(x) + 3g(x) \end{cases}$

    (b) $f^{(3)} - 2f^{(2)} - f^{(1)} + 2f = 0$.

21. Mirando la segunda parte del ejercicio 17, resolver los sistemas de ecuaciones en diferencias

    (a) $\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + 2y_n \\ y_{n+1} &= -4x_n + 3y_n \end{cases}$

    (b) $x_{n+3} - 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2x_n = 0$.

22. Sean A, B, D matrices en $M_n(\mathbb{K})$.

    (a) Probar que si D es diagonal, resulta $\chi_{AD} = \chi_{DA}$. *Sugerencia:* si algún término de la diagonal es 0, aplicar inducción. Si no, usar que D es inversible.

    (b) Probar que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (ahora B es cualquiera). *Sugerencia:* existen P y Q inversibles tales que PBQ es diagonal, y entonces $\chi_{AB} = \chi_{Q^{-1}ABQ}$, etc.

23. Sean ψ y ϕ endomorfismos de $\mathbb{V}$ ($\mathbb{V}$ de dimensión finita) que conmutan. Supongamos que ambos son diagonalizables. Probar que ambos se pueden diagonalizar en la misma base. Para ello, se puede seguir el programa:

    (a) Mostrar que si λ es un autovalor de ψ y $E_\lambda = \{v \in \mathbb{V} | \psi(v) = \lambda v\}$, entonces $\phi(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$.

    (b) Mostrar que dado que ϕ se diagonaliza, tambien se diagonalizan $\phi|_{E_{\lambda_i}}$ para cada autovalor λ_i de ψ. Usar que $\mathbb{V}$ se descompone como la suma directa de los E_{λ_i}.

    (c) Diagonalizando cada $\phi|_{E_{\lambda_i}}$, recuperar una diagonalización de ϕ y realizar el mismo cambio de base para ψ.

    Comparar con el ejercicio 6.