Algebra Lineal

2do. Cuatrimestre 2001

Práctica 6

Operaciones con matrices, subespacios invariantes y formas canónicas.

1. Sea la transformacion $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $||T||_E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donde E es la base canónica ordenada de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Hallar una base (de ser posible) en la que T sea diagonal, calcular las matrices de cambio de base.

   (b) Hallar una "raíz cuadrada" de T, es decir, una matriz de 3 por 3 M tal que $M^2 = T$ ¿hay mas de una? ¿hay mas de dos?. Idem con raíz cúbica, y con raíz cuarta..

   (c) Es $T - 8.Id$ una transformación inversible? en ese caso, calcular $(T^5 - 2T^2 + 8T).(T - 8Id)^{-3}$

   (d) Dado que T y $(T^5 - 2T^2 + 8T).(T - 8Id)^{-3}$ son transformaciones que conmutan, en caso de que sean diagonalizables deberia existir una base que diagonalice simultaneamente a ambas transformaciones. ¿ya sabe cual es esa base? ¿cuales son los autovalores de $(T^5 - 2T^2 + 8T).(T - 8Id)^{-3}$?

2. Sea $f : V \to V$ y $g : W \to W$ dos transformaciones lineales diagonalizables. Ver que $f \otimes g : V \bigotimes W \to V \bigotimes W$ es diagonalizable. (Recuerdo: si $v \in V$ y $w \in W$ $f \otimes g$ esta determinada por $f(\otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$). Cuáles son los autovalores de $f \otimes g$? Concluir que uno acaba de demostrar que si f y g son diagonalizables entonces $\chi_{f\otimes g} = \chi_f . \chi_g$, en particular $\det(f \otimes g) = \det(f). \det(g)$.

3. Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix}$ para deducir que A^n tiene en sus coeficientes los elementos de la sucesión de Fibonacci. Diagonalice A y obtenga una formula para A^n, en particular obtendrá una fórmula para el término general de la sucesión de Fibonacci.

4. (a) Sea r un número natural, A y B dos matrices que conmutan. Probar la fórmula del binomio de Newton:

   $$(A + B)^r = \sum_{k=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} A^k B^{r-k}$$

   (sugerencia: busque la demostración para el caso en que A y B son números reales y vea si se adapta o no a matrices)

   (b) Si N y N' son dos matrices nilpotentes que conmutan entre sí ¿sera cierto que $N + N'$ es nilpotente? Considere $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son N y N' nilpotentes? Es $N + N'$ nilpotente?

5. **Exponencial de una matriz** Sea A una matriz en $\mathbb{R}^{n\times n}$ o en $\mathbb{C}^{n\times n}$. Se define la exponencial de A como la siguiente matriz:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

donde asumimos que en algun curso de análisis se demostrará que las matrices que se obtienen haciendo las sumas parciales tienen coeficientes que convergen siempre.

(a) Supongamos que la matriz A es diagonal. Cuanto da e^A? Si existe una matriz inversible C y una diagonal D tal que $A = C.D.C^{-1}$, cuanto da e^A en términos de e^D y de C?

(b) Si una matriz N es nilpotente, se anima a demostrar la convergencia de la serie que calcula e^N?

(c) Sean A y B dos matrices que conmutan. Usando el producto de Cauchy de series demuestre que $e^{A+B} = e^A.e^B$. (recuerdo: si se tienen dos series $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n)$ y $(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n)$ Cauchy dice que para multiplicarlas se puede usar (con condiciones de convergencia que no vienen al caso, pero que se verifican para la serie de la exponencial) la fórmula: $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n).(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})$.

(d) Si A es una matriz que se puede llevar a una forma de Jordan, es decir, tal que existen C inversible, D diagonal y N nilpotente con $A = C(D+N)C^{-1}$, calcular e^A en términos de e^D e^N y C.

6. **Resorte unidimensional:**

(a) Un objeto de masa m está agarrado a un resorte y se mueve sobre una linea horizontal. Imaginando que la posición se llama x, y que el punto de equilibrio es justo cuando $x = 0$ se puede modelar la fuerza que experimenta ese objeto por una función de x del tipo $F = -kx$ donde $k > 0$.
(por ejemplo desarrollando Taylor a F hasta orden 1, sabiendo que $F(0) = 0$; el signo se debe a que cuando el objeto se va hacia la izquierda, la fuerza que hace el resorte es hacia la derecha y viceversa.)
Introduciendo la variable $p = m.v = m.\frac{dx}{dt}$ la ley de Newton se escribe como el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & 0.x & +\frac{1}{m}p \\ \frac{dp}{dt} = & -k.x & +0.p \end{cases}$$

Calcule (como mejor le parezca) la exponencial de la matriz de ese sistema de ecuaciones lineales y resuelva las ecuaciones con las condiciones $x(0) = 0$ y $p(0) = 1$.

(b) Supongamos que hay aire que frena al objeto agarrado al resorte. Cuando el objeto está quieto la resistencia del aire no aparece, y sí aparece cuando se mueve rápido, asi que un modelo es poner una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad (por ejemplo desarrollando en Taylor hasta orden 1). Tomamos ahora $F = -kx - \gamma v$ con $\gamma \in \mathbb{R}$. el sistema de ecuaciones a resolver ahora es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & 0.x & +\frac{1}{m}p \\ \frac{dp}{dt} = & -k.x & -\gamma\frac{1}{m}p \end{cases}$$

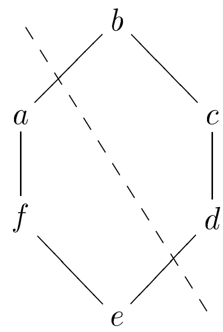
Calcule (como mejor le parezca) la exponencial de la matriz de ese sistema de ecuaciones lineales y resuelva las ecuaciones con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $p(0) = 1$.

7. Para las matrices A siguientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Hallar P inversible tal que $P^{-1}AP$ es de Jordan.
   (b) Cuáles son conjugadas entre sí?
   (c) Calcular e^A.

8. Supongamos que se tienen 6 numeros reales a, b, c, d, e, f dispuestos en los vertices de un hexágono:



Y se considera la transformacion lineal que a cada 6-upla de números (a, b, c, d, e, f) (imaginados en el hexágono) le asigna en cada vertice su correspondiente numero mas el promedio de los numeros "vecinos" menos el opuesto. Es decir, $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ dado por $T(a, b, c, d, e, f) =$

$$= \left(a + \frac{f+b}{2} - d, b + \frac{a+c}{2} - e, c + \frac{b+d}{2} - f, d + \frac{c+e}{2} - a, e + \frac{d+f}{2} - b, f + \frac{e+a}{2} - c\right)$$

Como la nociión de "ser vecino" y "ser el vertice opuesto" es invariante por rotaciones o simetrías del hexágono, es de esperar que este operador T conmute con la simetía con respecto al eje punteado en el dibujo que se llamará S. Convencerse de que $S(a, b, c, d, e, f) = (b, a, f, e, d, c)$.

   (a) Escribir las matrices de T y de S y verificar que $ST = TS$. Verificar que también $S^2 = Id$ (y que por lo tanto S se diagonaliza con autovalores 1 y -1). Hallar una base de autovectores de S (notar que salen "a ojo"), y descomponer $\mathbb{R}^6$ como suma directa $\mathbb{R}^6 = V_1 \bigoplus V_{-1}$ donde V_i es el subespacio asociado al autovalor i.
   (b) Para una base de V_1 y de V_{-1} hallar las matrices de $T|_{V_1}$ y de $T|_{V_{-1}}$ en esas bases (¿porqué los V_i son T-invariantes?). Diagonalizar $T|_{V_1}$ y $T|_{V_{-1}}$.
   (c) Considerar la transformación lineal "rotacion"; $R : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ definida por $R(a, b, c, d, e, f) = (f, a, b, c, d, e)$. Verificar $RT = TR$. Si se considera $R : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ con la misma fórmula, demostrar que R se diagonaliza, (con subespacios de autovectores todos de dimensión uno!). Notar que puede se puede usar esa descomposición de $\mathbb{C}^6$ para calcular autovectores (y autovalores) de T de manera muy sencilla.

9. (a) Hallar la forma de Jordan de:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 17 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) para cada una de las matrices anteriores, elevarlas a la potencia 72.

10. (a) Encontrar una matriz tal que su polinomio minimal sea $X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X + 4$.
(b) Encontrar una matriz en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, tal que su polinomio minimal sea $(X-1)(X-2)$.
(c) Encontarr tres matrices en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que sus polinomios minimales sean respectivamente $(X-1)(X-2)$, $(X-1)^2(X-2)$, y $(X-1)(X-2)^2$,
(d) idem en $\mathbb{R}^{4\times 4}$.

11. Demostrar que si N es una matriz nilpotente entonces $Id - N$ es inversible. (sugerencia: pensar en el desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{1-x}$).

12. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sabemos que $A = D + N$ donde D es diagonalizable, N es nilpotente y $DN = ND$.

(a) Utilizar una base en donde A se escribe en su forma de Jordan para demostrar que $\det(A) = \det(D)$.
(b) Deducir que A es inversible si y sólo si D es inversible. Más aún, suponiendo que A es inversible, escribiendo $A = D+N = D.(Id+D^{-1}.N)$ y utilizando el ejercicio anterior encuentre una fórmula de A^{-1} en términos de D y N.

13. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m = Id$. Demuestre que todos los autovalores de A son raíces m-ésimas de la unidad. Escribiendo $A = D + N$ con D diagonalizable y N nilpotente que conmuta con D verificar:

(a) $D^m = Id$.
(b) calcular $(D+N)^m$ utilizando la fórmula del binomio de Newton, ver que se escribe en la forma $(D+N)^m = Id + X.N$, donde a su vez X es una matriz de la forma $\widetilde{D} + \widetilde{N}$ con $\widetilde{D}$ diagonalizable, $\widetilde{N}$ nilpotente y $\widetilde{D}\widetilde{N} = \widetilde{N}\widetilde{D}$.
(c) Como $A^m = Id$, $X.N = 0$. Verificar que $\widetilde{D}$ es inversible, por lo tanto X es inversible, luego N debe ser cero, en consecuencia A era diagonalizable.

14. Sea $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz nilpotente. ¿cuál es el máximo $m \in \mathbb{N}$ tal que sea posible que $N^m = 0$ y $N^{m-1} \neq 0$? ¿cuál es el polinomio característico de N? ¿cuáles son las posibilidades para el polinomio minimal de N? Para cada posibilidad exhibir un ejemplo.

15. Sea $n \in \mathbb{N}$, $N \in k^{n\times n}$ tal que $N^n = 0$ pero $N^{n-1} \neq 0$. Probar que N no tiene una "raíz cuadrada", es decir, que no existe ninguna matriz A tal que $A^2 = N$. (sugerencia: es A nilpotente?)

16. Sea N una matriz nilpotente en $\mathbb{C}^{3\times 3}$ y sea $A = Id + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$. Ver que A es una raíz cuadrada de $(Id + N)$ (o sea $A^2 = Id + N$). Utilizar el desarrollo en serie de potencias de $(1+x)^{1/2}$ para adivinar e inmediatamente después *demostrar* una fórmula que calcule una raíz cuadrada de $Id + N$ para matrices de $n \times n$ con $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.