Algebra Lineal
2do. Cuatrimestre 2001

Práctica 1

Nota: La letra k denotará un cuerpo; k-e.v. querrá decir un k espacio vectorial

1. Ver que cada uno de los siguientes conjuntos es un espacio vectorial sobre el cuerpo correspondiente, ver en cada caso si son finitamente generados o no y hallar una base.
   (a) $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.
   (b) $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$.
   (c) $k^3 = k \times k \times k$ sobre k (definir la suma en k^3 y la multiplicación por escalares de k)
   (d) $k[X]$ (polinomios) sobre k
   (e) $k[X, Y]$ (polinomios en dos variables) sobre k

2. Sea X un conjunto no vacío. Sea $k^X = \{$ funciones $f : X \to k\}$. Definir una suma y una acción de k que haga de k^X un k-e.v. ¿Qué condiciones se debe pedir a X para que k^X sea de dimensión finita? En ese caso, hallar una base.

3. Sea X un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ (por ejemplo un intervalo). Convencerse de que los siguientes conjuntos son $\mathbb{R}$-e.v.:
   (a) $C^\infty(X) =$ funciones infinitamente derivables.
   (b) $\mathbb{R}^X$ (no hay nada que hacer, es el ejercicio anterior)
   (c) $C(X) =$ funciones continuas.
   (d) $\{f \in C^\infty(X)$ tales que $f'(x) = f(x)\ \forall x \in X\}$.
   (e) $C^1(X) =$ funciones derivables.
   (f) Sea $x_0 \in X$, $\{f \in C^1(X)$ tales que $f(x_0) + 3f'(x_0) = 0\}$.

   ¿Quién es subespacio de quién?

4. Sean V y W dos k-e.v., definir sobre el conjunto $V \times W$ una estructura de k-e.v.

5. Sea X un conjunto no vacío, V un k-e.v., $V^X = \{f : X \to V\}$. Definir sobre V^X una estructura natural de k-e.v. Si $Y \subseteq X$ es un subconjunto, ¿puede interpretarse a V^Y como un subespacio de V^X ?

6. Sea $V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f'' + f = 0\}$. Ver que es un subespacio de $C^\infty(\mathbb{R})$, probar que las funciones $sen(t)$ y $cos(t)$ pertenecen a V. Son linealmente independientes? Si $a, b \in \mathbb{R}$, ver que la función $a.sen(t + b) \in V$; ¿es posible expresar esta función como combinación lineal de $sen(t)$ y $cos(t)$?

7. Sea $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in k^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Dar la dimensión de V y encontrar una base.

8. Hacer un dibujo en $\mathbb{R}^2$ de los siguientes conjuntos:

   (a) $\{\lambda.(1,2)/\lambda \in \mathbb{R}\}$

   (b) $\{\lambda.(1,2)+(5,5)/\lambda \in \mathbb{R}\}$

   (c) $\{\lambda.(1,2)+(2,-1)/\lambda \in \mathbb{R}\}$

   (d) $\{\lambda.(1,2)+\mu.(2,-1)/\lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

   (e) $\{\lambda.(1,2)+\mu.(2,-1)/\lambda,\mu \in \mathbb{R}\ \ \lambda+\mu=1\}$

   ¿Cuáles de los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que dibujó son subespacios de $\mathbb{R}^2$? En caso de ser subespacio hallar dimensión y dos bases diferentes en cada caso.

9. Sea V un k-e.v. y $\{u,v,w\} \subseteq V$ tres vectores linealmente independientes. ¿Es cierto que el conjunto $\{u,v,u+v+w\}$ es también linealmente independiente? y el conjunto $\{u+w,v+w\}$?

10. ¿Para que $n \in \mathbb{N}$ es $\mathbb{Z}_n$ un cuerpo?

11. Para cada $\lambda \in \mathbb{Z}_5$ determinar $\dim_{\mathbb{Z}_5}\langle(-1,1,1),(1,\lambda,1),(1,-1,\lambda^2)\rangle$ (donde $\langle\ldots\rangle$ significa "el subespacio generado por ... ").

12. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ determinar $\dim_{\mathbb{R}}\langle(-1,1,1),(1,\lambda,1),(1,-1,\lambda^2)\rangle$.

13. Hallar dimensión y una base del subespacio $\{x \in \mathbb{Z}_7^3/A.x=2x\}$ donde $A \in \mathbb{Z}_7^{3\times 3}$ es la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

14. Para cada $\lambda \in \mathbb{Z}_3$ hallar dimensión y una base del subespacio de S de $\mathbb{Z}_3^3$ dado por $S=\{x \in \mathbb{Z}_3^3/A.x=0\}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$.