Algebra Lineal

Segundo Cuatrimestre de 2001

Práctica 2

Subespacios. Transformaciones Lineales.

De ahora en adelante, $k[x]_{<n} := \{p \in k[x]$ tal que $p = 0$ ó $\operatorname{gr} p < n\}$. $k^{\mathbb{N}} = \{$ sucesiones en $k\} = \{(u_1, u_2, \ldots) | u_i \in k \ \forall i \in \mathbb{N}\}$.
La composición de transformaciones lineales se notará indistintamente por $f \circ g$ ó fg. Los ejercicios marcados con un asterisco * no deberían causar dificultad.

1. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$, y definamos $p_i = \prod_{j \neq i}(x - \alpha_j)$.

   (a) Demostrar que los p_i son una base de k_n.

   (b) Escribir un polinomio general en esta base.

   (c) (Lagrange) Dados $\beta_1, \ldots, \beta_n \in k$, probar que existe un único polinomio $p \in k_n$ tal que $p(\alpha_i) = \beta_i \ \ \forall i$.

2. * Dados los espacios vectoriales y los subespacios S y T, calcular $S \cap T$ y $S + T$. Decir si están en suma directa.

   (a) $\mathbb{Q}^3$ sobre $\mathbb{Q}$, $S = \{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ $T = \langle (1,2,3); (1,1,4) \rangle$.

   (b) $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, $S = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ $T = \langle \sqrt{3} \rangle$.

   (c) $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$, $S = \{$funciones pares$\}$ $T = \{$funciones impares$\}$.

   (d) $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, $S = \langle (1, \alpha) \rangle$ $T = \langle (1, \beta) \rangle$, $\alpha \neq \beta$.

   (e) $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$, $S = \langle (1, \alpha, \alpha^2) \rangle$ $T = \langle (1, \beta, \beta^2); (1, \gamma, \gamma^2) \rangle$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

3. En $\mathbb{R}$ visto como $\mathbb{Q}$-e.v. $S = \langle 1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{15} \rangle$. Probar que si $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, $\alpha^n \in S \ \ \forall n \geq 0$. Conclusión: hay un polinomio de grado ≤ 4 con coeficientes racionales del cual $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ es raíz. ¿Se puede demostrar que hay un polinomio en $\mathbb{Q}$ con raíz $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ con un método similar?

4. * Decidir si es verdadero o falso, justificando.

   (a) $V, W \subseteq \mathbb{R}^3$, $\dim V = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(V \cap W) > 0$.

   (b) $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^5$, $\dim U = \dim V = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(U \cap V \cap W) > 0$.

5. * Calcular las posibles dimensiones de $U \cap V \cap W$ donde los tres son subespacios de k^{12} tales que $\dim U = 8$, $\dim V = 9$, $\dim W = 10$.

6. * Definición: $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Una *cadena* es una familia $0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \mathbb{V}$ de subespacios. Una *bandera* es una cadena tal que $\dim S_i = i$ y $S_n = \mathbb{V}$ (S_n el último elemento de la cadena).

   Completar las siguientes cadenas a banderas agregando subespacios intermedios:

   (a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \langle (1,1,0,0) \rangle$ $S_2 = S_1 + \langle (1,1,1,1); (0,1,0,0) \rangle$.

   (b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \langle (1,-1,0,1) \rangle$ $S_2 = \{x_1 + x_2 = 0\}$.

   (c) $\mathbb{V} = \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $S_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$ $S_2 = \{M | \operatorname{tr} M = 0\}$.

   (d) $\mathbb{V} = \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $S_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ $S_2 = \{M | MA = AM\}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Sean $\{v_1, \ldots, v_k\}$ vectores en $\mathbb{V}$, y sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{V}$. Denotamos por $[v_i]_{\mathcal{B}} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ las coordenadas de los v_i en la base $\mathcal{B}$. Sea otro vector $b \in \mathbb{V}$, $[b]_{\mathcal{B}} = (b_1, \ldots, b_n)$. Probar que

   (a) $b \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$.

   (b) $Ax^t = b^t$ tiene solución única $\Leftrightarrow$ los v_i son l.i. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg}(A) = k$.

   (c) A es inversible $\Leftrightarrow$ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de $\mathbb{V}$ (acá $k = n$).

8. * Sea $\mathbb{V}$ un e.v. y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base. Sean $\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2,\ v_2 + v_3,\ v_3 + v_4,\ v_4 - v_1\}$ y $\mathcal{B}'' = \{v_1 + 2v_2,\ 3v_1 + v_2 + 3v_3,\ 3v_1 + 2v_3 + v_4,\ 8v_1 + 5v_3 + 3v_4\}$. Escribir v_1, v_2, v_3, v_4 en $\mathcal{B}'$. Calcular $C_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'}$.

9. Sea, en $\mathbb{Z}_7^3$, $\mathcal{B} = \{(1,1,3); (0,2,4); (1,2,2)\}$. Ver que es una base. Calcular las coordenadas de $(0,1,2)$, $(1,2,3)$ y $(2,3,4)$ en esta base.

10. Sea $\mathbb{V}$ el espacio vectorial de todas las sucesiones con coeficientes reales. Sea S el subespacio de las sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

    (a) Ver que todo elemento de S esta determinado por sus dos primeras coordenadas u_1 y u_2. Conclusión: $\dim S = 2$.

    (b) Encontrar las sucesiones geométricas de S, es decir, aquellas tales que $u_n = \phi^{n-1}$ para algún ϕ no nulo en $\mathbb{R}$. Ver que son una base de S.

    (c) Escribir la sucesión de Fibonacci (o sea la sucesión de S con $u_1 = u_2 = 1$) como combinación lineal de la base encontrada recién. Esto da una fórmula para el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci.

11. * Decir cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales. Calcular Ker e Im en los casos en que sean, y en los que la dimensión del dominio y el codominio sea finita, dar una matriz en alguna base.

    (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\quad f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\ x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2)$.

    (b) $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$, $\quad f(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4,\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4)$.

    (c) $f : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2$, $\quad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ 2x_1 - x_2)$.

    (d) $f : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(F) = (F(0), F(2))$.

    (e) $f : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\quad f(F) = (F(1), F(2), F(3), \ldots)$.

    (f) $f : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $\quad f(F) = (F(0), F'(0), F''(0))$.

    (g) $f : \mathbb{R}[x]_{<4} \to \mathbb{R}[x]_{<4}$, $\quad f(p) = p'$.

    (h) $f : \mathbb{R}[x]_{<4} \to \mathbb{R}[x]_{<4}$, $\quad f(p)(x) = \int_0^x p(t)dt$.

    (i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x, y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta,\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$ donde $0 \le \theta < 2\pi$. Dibujar.

12. *

    (a) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = (5,2)$. Determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$. Determinar la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

    (b) ¿Existirá una t.l. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$, $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$?

    (c) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.l. con $f(1,0,1) = (1,2,1)$, $f(2,1,0) = (2,1,0)$ y $f(-1,0,0) = (1,2,1)$, $g(1,1,1) = (1,1,0)$, $g(2,2,-1) = (3,-1,2)$ y $g(3,2,1) = (0,0,1)$. Determinar si $f = g$.

    (d) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1,-1,1) = (2,a,-1)$, $f(1,-1,2) = (a^2,-1,1)$ y $f(1,-1,-2) = (5,1,-3)$.

13. * Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x + 5y + 3z,\ x + 4y + 2z,\ 2y + z)$, y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (2x + y,\ x + y,\ 3x - 2y)$. Hallar la matriz de f y g. Ver que f es inversible y calcular la matriz de $f^{-1} \circ g$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

    Sean $\mathcal{B} = \{(2,1);(3,2)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2,1,0);(5,4,2);(3,2,1)\}$. Calcular la matriz $[f^{-1} \circ g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

14. Sean $f, g : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ las t.l. definidas por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

    Hallar $f-g$, fg, ff, gg, gf, $f(g+f)$. ¿Qué pasa con las matrices correspondientes en la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

15. Sean $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, $g : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$ funciones tales que $f \circ g$ es una transformación lineal.

    (a) ¿es cierto que f y g son t.l.?
    (b) ¿es cierto que f ó g es t.l.?
    (c) ¿es cierto que f es t.l. si g lo es?
    (d) ¿es cierto que g es t.l. si f lo es?

16. Sean $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, $g : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$. Probar que

    (a) $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} gf$, y son iguales si g es mono.
    (b) $\operatorname{Im} g \supseteq \operatorname{Im} gf$, y son iguales si f es epi.
    (c) ¿Se anima a dar condiciones menos fuertes que "g mono" y "f epi" para que valgan las igualdades?

17. * Determinar si existe, y en caso afirmativo hallarla, una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique que $\operatorname{Im}(f) = S$ y $\operatorname{Ker}(f) = T$, donde

    (a) $S = \{x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle(1,2,1)\rangle$.
    (b) $S = \{x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle(1,2,-1)\rangle$.

18. * Determinar una t.l. $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ que verifique en cada caso

    (a) $(1,1,0) \in \operatorname{Ker}(f)$ y $\dim(\operatorname{Im} f) = 1$.
    (b) $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \langle(1,1,2)\rangle$.
    (c) $f \neq 0$ y $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Im}(f)$.
    (d) $f \neq 0$ y $f^2 = 0$.
    (e) $f \neq \operatorname{Id}$ y $f^2 = \operatorname{Id}$.
    (f) $f \neq 0$ y $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = 0$.

19. * Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. cuya matriz en las bases canónicas es $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $S = \langle(1,1,0,0);(1,2,-1,1)\rangle$. Hallar un subespacio T de $\mathbb{R}^3$ tal que $T \subseteq \operatorname{Im}(f)$ y $f(S) \cap T = 0$.

20. Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$, en $\operatorname{End}(\mathbb{V})$ se define $[f,g] = fg - gf$.

    (a) Probar que $[f,g] = -[g,f]$ (antisimetría) y $[[f,g],h] + [[g,h],f] + [[h,f],g] = 0$ (identidad de Jacobi).
    (b) (Heisenberg) Sea $\mathbb{V} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f(F)(x) = F'(x)$, $g(F)(x) = xF(x)$ y $h(F)(x) = F(x)$. Calcular $[f,g]$, $[f,h]$ y $[g,h]$.

21. Sea $\mathbb{V}$ un e.v. de dimensión finita n, y sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{V})$.

(a) Probar que $\operatorname{Im}(f^2) \subseteq \operatorname{Im}(f)$ y $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f^2)$. Además si una inclusión es una igualdad, entonces la otra también.

(b) Probar que si $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$, entonces $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = 0$ y $\mathbb{V} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

22. Definición: Sea $\mathbb{V}$ un k-e.v. Se dice que $P \in \operatorname{End}(\mathbb{V})$ es un *proyector* si se cumple que $P^2 = P$.

 (a) Probar que si P es un proyector, se cumple que $\mathbb{V} = \operatorname{Ker}(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$ y que $P|_{\operatorname{Im}(P)} = \operatorname{Id}_{\mathbb{V}}$. Para $\mathbb{V}$ de dim. finita, elegir una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ compuesta por vectores del núcleo y la imagen de f y determinar $[f]_{\mathcal{B}}$.

 (b) Sean S, T subespacios de $\mathbb{V}$ tales que $\mathbb{V} = S \oplus T$. Probar que existe un proyector P tal que $S = \operatorname{Ker}(P)$ y $T = \operatorname{Im}(P)$.

 (c) Sean $P_1, P_2 : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ t.l. que verifican que P_1 es un proyector y $P_1 + P_2 = \operatorname{Id}$. Probar que P_2 también es un proyector, y que $\mathbb{V} = \operatorname{Im}(P_1) \oplus \operatorname{Im}(P_2)$. Calcular P_1P_2. Sug: Pensar en la matriz $[P_1]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B}$ como antes.

 (d) Construir un proyector $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Im}(P) = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

23. Observación: $P^2 = P$ se puede escribir como $P^2 - P = 0$, y esto a su vez como $(P-1)P = 0$, donde se denota por 1 a la identidad. Por otro lado, $\operatorname{Ker} P = \{x | Px = 0x\}$, e $\operatorname{Im} P = \{x | Px = 1x\}$.

 (a) ¿Se puede hacer algo parecido al ejercicio anterior con $F \in \operatorname{End}(\mathbb{V})$ tal que $F^2 = 1$?
 Sugerencia 1: $F^2 = 1 \Leftrightarrow F^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (F-1)(F+1) = 0$. Sugerencia 2: $\frac{F+1}{2}$ es un proyector.

 (b) (Cagliero) Sea $F \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ el morfismo cuya matriz en la base canónica es (a_{ij}), donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ (-1)^{j-1}\binom{i-1}{j-1} & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

 ($\binom{a}{b}$ es el número combinatorio $\frac{a!}{b!(b-a)!}$). Probar que $F^2 = \operatorname{Id}$. Encontrar una base en que la matriz de F se escriba con 1 y -1 en la diagonal, y 0 fuera.

 Definición: F se dice *idempotente* si $F^2 = \operatorname{Id}$.

24. Definición: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita n. Un endomorfismo f de $\mathbb{V}$ se dice *nilpotente* si para algún entero positivo m se tiene $f^m = 0$. ¿Puede ser f un automorfismo?

 (a) Probar que en este caso, alcanza con componer f n veces consigo misma para obtener 0. Sugerencia: ver que las inclusiones $\operatorname{Ker}(f^i) \subseteq \operatorname{Ker}(f^{i+1})$ tienen que ser estrictas si $\operatorname{Ker}(f^i) \neq \mathbb{V}$.

 (b) Para cada i, $1 \leq i \leq n$ construir un endomorfismo nilpotente de k^n tal que $f^i = 0$ y $f^{i-1} \neq 0$.

 (c) Inspirarse en la formula de la serie de $(1+x)^{-1}$ para demostrar que (si f es nilpotente) $Id + f$ es inversible.

25. Sea $\mathbb{V}$ un k-e.v. de dim. finita y S, T subespacios. Probar que existe $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{V})$ tal que $f(S) = T$ si y sólo si $\dim S = \dim T$.

26. (a) Probar que hay $(5^2-1)(5^2-5)$ matrices inversibles en $\mathbb{Z}_5^{2\times 2}$. Sugerencia: alcanza con calcular la cantidad de automorfismos de $\mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$.

 (b) Generalizar lo anterior y calcular la cantidad de matrices inversibles en $\mathbb{Z}_p^{n\times n}$ con p primo.

27. * Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ una t.l. entre k-e.v. de dim. finita, y sea $r = \dim(\operatorname{Im} f)$.

 (a) Describir cómo se pueden encontrar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{V}'$ respectivamente tales que $[f]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ sea una matriz diagonal con r unos en la diagonal, y el resto 0.

 (b) Encontrar bases así para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que la matriz de f en la base canónica es $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

28. * Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una t.l. y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases cualesquiera de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente. Hallar $\dim(\operatorname{Ker} f)$ y $\dim(\operatorname{Im} f)$ en cada caso:

$$(i)\ [f]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

29. Definir una t.l. $t : \mathbb{R}[x]_{<3} \to \mathbb{R}[x]_{<4}$ de manera que $t(f)$ sea el polinomio que a cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ le haga corresponder el valor $xf(x) + \frac{f(x)-f(0)}{x}$. Encontrar la matriz de t en las bases $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ de $\mathbb{R}[x]_{<3}$ y $\{1, 1-x, (1+x)^2, (1-x)^3\}$ de $\mathbb{R}[x]_{<4}$. Verificar calculando $t(-2+3x-x^2)$ de dos formas distintas.

30. Con el teorema de la dimensión que dice, a saber, "si $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, $\dim \mathbb{V} = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$" se puede demostrar que si $\mathbb{V}$ es de dimensión finita y $f \in \operatorname{End}(\mathbb{V})$ entonces f es iso $\Leftrightarrow$ f es mono $\Leftrightarrow$ f es epi. También se puede demostrar que f tiene inverso por izquierda (o sea $\exists g$ tal que $gf = \operatorname{Id}$) $\Leftrightarrow$ f tiene inverso por derecha (o sea $\exists h$ tal que $fh = \operatorname{Id}$) y en tal caso ambos inversos coinciden.

    (a) Pensarlo y demostrarlo, si es posible.

    (b) ¿Qué pasa en dimensión infinita? Ver por ejemplo las t.l.

        i. $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\quad D(f)(x) = f'(x)$.

        ii. $S_r : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\quad S_r((u_1, u_2, \ldots)) = (0, u_1, u_2, \ldots)$.

        iii. $S_l : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\quad S_l((u_1, u_2, \ldots)) = (u_2, u_3, u_4, \ldots)$.