Algebra Lineal
2do. Cuatrimestre 2001

Práctica 3
Espacio de transformaciones lineales, dual.

1. * Si S es un subespacio de V y $i : S \to V$ es la inclusión, es decir $i(s) = s \ \forall s \in S$, verificar que $i^* : V^* \to S^*$ es la aplicación "restricción a S", verificar que $Ker(i^*) = S^0$.

2. * Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x - 3y, 2z - x)$. Sean $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ y $B' = \{(1, 0), (1, 1)\}$. Hallar las bases duales, la matriz de f en las bases B y B' y la de f^* en las bases duales de B' y B, hallar la matriz de f^* en las bases duales a las canónicas de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$.

3. * Sean V, W, L espacios vctoriales, $f, f_1, f_2 : V \to W$ $g : W \to L$ transformaciones lineales y $\lambda \in k$. Probar lo siguiente:
   (a) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$ y $(\lambda f)^* = \lambda f^*$
   (b) $(gf)^* = f^* g^*$
   (c) i. Si f es monomorfismo entonces f^* es epimorfismo.
      ii. Si f es epimorfismo entonces f^* es monomorfismo.
      iii. Si f es isomorfismo entonces f^* es isomorfismo y además $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

4. * Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x - y + z - t, x + z)$. Hallar bases de $Ker(f)$, $Im(f)$, $Ker(f)^0$, $Im(f)^0$, $Ker(f^*)$ e $Im(f^*)$.

5. * Sea $f : V \to W$ una transformación lineal, i_V e i_W las aplicaciones canónicas de V en V^{**} y de W en W^{**} respectivamente.
   (a) i. Si f es monomorfismo entonces f^{**} es monomorfismo.
      ii. Si f es epimorfismo entonces f^{**} es epimorfismo.
      iii. Si f es isomorfismo entonces f^{**} es isomorfismo y además $(f^{1-})^{**} = (f^{**})^{-1}$.
   (b) Ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle i_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_W} \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

   es decir, ver que $fi_V = i_W f^{**}$.
   (c) Supongamos que V y W son de dimensión finita. Probar que
      i. Si f^* es monomorfismo entonces f es epimorfismo.
      ii. Si f^* es epimorfismo entonces f es monomorfismo.
      iii. Si f^* es isomorfismo entonces f es isomorfismo

6. * Sean V y W dos espacios vectoriales, $B = \{x_1, ..., x_n\}$ base de V, $B' = \{y_1, ..., y_m\}$ base de W y $f : V \to W$ una transformación lineal.
   (a) Si para cada $i = 1, ..., n$ $f(x_i) = \sum_j a_{ij} y_j$ ¿cuál es la matriz de f en las bases B y B'?
   (b) Si $B^* = \{x^1, ..., x^n\}$ es la base (de V^*) dual de B y $B'^* = \{y^1, ..., y^m\}$ es la base dual de B' escribir la matriz de la transformación lineal $f^* : W^* \to V^*$ en dichas bases. ¿Cuál es la relación entre ambas matrices?
   (c) Si $\hat{B} = \{\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n\}$ es la base (de V^{**}) dual de B^* y $\hat{B}' = \{\hat{y}_1, ..., \hat{y}_m\}$ es la base dual de B'^* escribir la matriz de la transformación lineal $f^{**} : W^{**} \to V^{**}$ en dichas bases. ¿Cuál es la relación entre estas matrices?

(d) Si denotamos por $i_V : V \to V^{**}$ la aplicación canónica de V en su doble dual (si $v \in V$ $i_V(v)$ es la aplicación que a cada $\phi \in V^*$ le asigna el escalar $i_V(v)(\phi) = \phi(v)$) verificar que $i_V(x_i) = \hat{x}_i$ $i = 1, ..., n$.

7. Sea V un espacio vectorial (de cualquier dimensión). V^{***} es el doble dual de V^* por lo tanto se tiene la aplicación canónica $i_{V^*} : V^* \to V^{***}$. Por otro lado, dualizando la aplicación $i_V : V \to V^{**}$ se tiene la aplicación $(i_V)^* : (V^{**})^* \to V^*$. Probar que $(i_V)^* i_{V^*} = Id_{V^*}$.

Definición Si V es un k-espacio vectorial con base $\{x_i\}_{i\in I}$ y W es un k-espacio vectorial con base $\{y_j\}_{j\in J}$ se define el espacio vectorial $V \otimes W$ como el espacio vectorial (sobre k) cuya base es el conjunto $\{(x_i, y_j)\}_{(i,j)\in I\times J}$. A $V \otimes W$ Se lo llama el **producto tensorial** de V y W.

Notación: al elemento $(x_i, y_j) \in V \otimes W$ se lo escribirá $x_i \otimes y_j$. Si $v \in V$ $w \in W$ $v = \sum_i \lambda_i x_i$ y $w = \sum_j \mu_j y_j$, el elemento $\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j x_i \otimes y_j$ se lo denotará $v \otimes w$.

8. Probar:

(a) $V \otimes W$ esta generado por los elementos de la forma $\{v \otimes w$ tales que $v \in V$ y $w \in W\}$.

(b) Si $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, ¿cuál es la dimensión de $V \otimes W$?

(c) $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$ y $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$. Concluir que $v \otimes 0 = 0 \otimes w = 0$ $\forall v \in V$ $\forall w \in W$.

(d) Probar que $V \otimes k \cong k \otimes V \cong V$ para todo espacio vectorial V.

9. * Dados tres espacios vectoriales V, W, L probar:

(a) $Hom_k(V \otimes W, L) \cong Hom_k(V, Hom_k(W, L))$. Concluir que $(V \otimes W)^* \cong Hom_k(V, W^*)$.

(b) Probar que $V \otimes W \cong W \otimes V$ y $(V \otimes W) \otimes L \cong V \otimes (W \otimes L)$.

10. Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita probar que $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$ y $Hom_k(V, W) \cong V^* \otimes W$.

11. Probar que si V y W son dos espacios vectoriales, S y T subespacios de V tales que $V = S \bigoplus T$, entonces $(S \bigoplus T) \otimes W = (S \otimes W) \bigoplus (T \otimes W)$.

12. * *Teorema de representación de Riesz para* $\mathbb{R}^n$. Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $\langle , \rangle$ el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$, es decir $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Ver que la aplicación $v \mapsto \langle -, v \rangle$ es una transformación lineal inyectiva entre $\mathbb{R}^n$ y $(\mathbb{R}^n)^*$ ($< -, v >$ es la aplicación lineal definida por $\langle -, v \rangle(x) = \langle x, v \rangle$). Concluir que es un isomorfismo, es decir, toda $\phi \in (\mathbb{R}^n)^*$ es de la forma $\langle -, v \rangle$ para un (único) $v \in \mathbb{R}^n$. Nota: durante este ejercicio, sabrán perdonar el hecho de que se utilice la misma notación para el producto interno que para "el subespacio generado por".

13. * Sea $V = C^\infty(\mathbb{R})$, ver que las siguientes aplicaciones son elementos del dual de V:

(a) Para cada $a \in \mathbb{R}$, $\phi_a : V \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_a(f) = f(a)$ (donde $f \in V$). Si $a \neq b$ son ϕ_a y ϕ_b linealmente independientes? (sugerencia: plantear la condición de independencia lineal y evaluar en diversas funciones convenientes para así obtener condiciones sobre los escalares).

(b) Para cada $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $\phi_a^n : V \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_a^n(f) = f^{(n)}(a)$ (derivada n-ésima de f evaluada en a). Si $n \neq m$, son ϕ_a^n y ϕ_a^m linealmente independientes?

(c) Si $a < b$ son dos números reales, $I : V \to \mathbb{R}$ dada por $I(f) = \int_a^b f$. (¿porqué I está bien definida?, es decir porqué la integral esa siempre existe?).

(d) Si $a < b$ son dos números reales, $L(f) = \int_a^b f'$. ¿Es L combinación lineal de alguna de las aplicaciones de los ítems anteriores?

(e) Si $g \in C([0, 1])$ $I_g(f) = \int_0^1 g.f$. Si por ejemplo g_1 está dada por $g_1(t) = 1$ $\forall t \in [0, 1]$ y g_2 está dada por $g_2(t) = t^2$ $\forall t \in [0, 1]$, son I_{g_1} e I_{g_2} linealmente independientes?

14. Si $V = S \bigoplus T$ probar que $V^* \cong S^* \bigoplus T^*$

15. Probar que $k[X]^* \cong k^{\mathbb{N}_0}$ donde $\mathbb{N}_0$ son los números naturales con el 0 y $k^{\mathbb{N}_0}$ son las funciones de $\mathbb{N}_0$ en k, es decir, las sucesiones de elementos de k. (sugerencia: toda $\phi \in k[X]^*$ queda unívocamente determinada por los valores que toma en una base).

16. Sea $V = C^1(\mathbb{R})$ y $W = C(\mathbb{R})$. Considerar $D : V \to W$ dada por $D(f) = f'$ e $I : W \to V$ $I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. ¿Cuál es el núcleo e imagen de D e I? Verificar que $DI = id_W$ luego ID es un proyector en V (es decir $(ID)^2 = ID$). Concluir que $V \cong W \bigoplus \mathbb{R}$ y por lo tanto $V^* \cong W^* \bigoplus \mathbb{R}$.

17. Sea $V = k^{n\times n}$=matrices cuadradas de n por n.
    (a) * Verificar que la traza es un elemento del dual de V. (la traza de una matriz esta definida por: si A es la matriz que en el lugar (i,j) tiene el elemento a_{ij}, $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$). Sea $< tr > \subsetneq V^*$, hallar una base de $^0 < tr > \subsetneq V$.
    (b) * Probar que para cualquier par de matrices A y B vale $tr(AB) = tr(BA)$. Si C es una matriz inversible, cuanto vale $tr(CAC^{-1})$?
    (c) Exhibir un ejemplo dos matrices (A y B) de 2 por 2 tales que $tr(AB) \neq tr(A)tr(B)$.
    (d) Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$ es un endomorfismo de V, ¿cómo definiría $tr(f)$? ¿por qué es posible dar esa definición?

18. Sea S el subespacio de $\mathbb{Z}_5^4$ generado por el vector $(0,1,2,3)$ y T el subespacio generado por $(1,1,1,1)$.
    (a) Hallar una base de T^0, de S^0 y de $(S \bigoplus T)^0$.
    (b) Si $v_1 = (0,1,2,3)$ y $v_2 = (1,1,1,1)$, completar a una base de $\mathbb{Z}_5^4$. Definir dos transformaciones lineales f_1 y f_2 que verifiquen $f_i(v_1) = v_2$ y $f_i(v_2) = v_1$ $(i = 1,2)$. Calcular las matrices de f_i en esa base y en la base canónica, calcular $tr(f_i)$.