Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2002

Práctica 10

Formas bilineales - Espacios Vectoriales con Producto Interno

(1) Probar que las siguientes funciones son formas bilineales:
  (a) $\Phi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definida por $\Phi(x, y) = x.A.y^t$ donde $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
  (b) $\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ definida por $\Phi(v, w) = f_1(v).f_2(w)$ donde V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f_1,\ f_2 \in V^*$.
  (c) $\Phi : \mathbb{K}^{m\times n} \times \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}$ definida por $\Phi(A, B) = \operatorname{tr}(A^t.C.B)$ donde $C \in \mathbb{K}^{m\times m}$.

(2) Determinar si las siguientes funciones son o no formas bilineales. En caso afirmativo calcular su matriz en la base canónica correspondiente y determinar si la forma bilineal es simétrica:
  (a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$
  (b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\Phi(x, y) = -x_1.y_1 - x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + 2.x_1.y_2$
  (c) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ $\Phi(x, y) = (1 + i).x_1.y_1 + x_2.y_1 + (1 - i)x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$
  (d) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\Phi(x, y) = x_1^2 + x_2.y_1 + x_1.y_2 - x_2^2$
  (e) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_3.y_3 - x_1.y_3 - x_3.y_1$
  (f) $\Phi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + (2 + i)x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 + (2 + i).x_1.y_2 + x_1.y_3 + x_3.y_1 - x_3.y_3$
  (g) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\Phi(x, y) = (3x_1 + x_2 - x_3).(4y_2 + 2y_3)$

(3) Calcular el núcleo de las formas bilineales simétricas del ejercicio anterior.

(4) Para cada una de las formas bilineales simétricas del ejercicio 2 hallar una base B de manera que $||\Phi||_B$ sea diagonal.

(5) Para cada una de las formas bilineales reales siguientes hallar una base tal que la matriz de la forma bilineal en dicha base sea diagonal, exhibir la matriz de la forma bilineal en esta base. Calcular signatura y rango, decidir si es degenerada o no, definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida.
  (a) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $||\Phi||_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
  (b) $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 2.x_1.y_3 + 2.x_3.y_1 - x_3.y_3 - x_4.y_4$.

(6) Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.
  (a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$
  (b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$
  (c) $\Phi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$
  $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
  (d) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
  $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_2 - x_1.\overline{y}_2 - x_2.\overline{y}_1$
  (e) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
  $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + (1 + i).x_1.\overline{y}_2 + (1 + i).x_2.\overline{y}_1 + 3.x_2.\overline{y}_2$
  (f) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
  $\Phi(x, y) = x_1.\overline{y}_1 - i.x_1\overline{y}_2 + i.x_2\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2$
  (g) $\Phi : \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$
  $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_3.\overline{y}_3 - x_1.\overline{y}_3 - x_3.\overline{y}_1$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
  (h) $\Phi : \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$
  $\Phi(x, y) = 3.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_1.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(7) Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) = x_1.y_1 - 2.x_1.y_2 - 2.x_2.y_1 + 6.x_2.y_2$$

Probar que Φ es un producto interno. Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ.

(8) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.
  (a) Probar que existe un único producto interno en V para el cual B resulta ortonormal.
  (b) Hallarlo en los casos
    (i) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$
    (ii) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$
    (iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
    (iv) $V = \mathbb{C}^3$ y $B = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$

(9) Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ es

$$\Phi(x,y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1+b).x_3.y_3$$

un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

(10) Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:
(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$.
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S_2 =< (1, 2, 1) >$
Para el producto interno canónico y para el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_1.y_2 - x_2.y_1$$

(c) $V = \mathbb{C}^4$, $S_4 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2i.x_2 - x_3 + 6.x_4 = 0 \\ 2.x_2 + (1+i).x_3 + 6i.x_4 = 0 \end{cases}\right\}$
para el producto interno $\langle x, y\rangle = x_1.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3 + 3.x_4.\overline{y}_4$.
(d) $V = \mathbb{R}^4$, $S_5 =< (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) >$
para el producto interno canónico.

(11) Para los subespacios del ejercicio anterior, hallar bases ortonormales para cada uno de los productos internos considerados. Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios. Hallar el punto de S_5 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$.

(12) (a) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.
(b) Se considera $\mathbb{R}_{<4}[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S =< 1 >$.

(13) Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal, para el producto interno canónico, sobre el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$.
(a) Encontrar una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L) = (1, 2, 1)$. ¿Es única?
(b) Encontrar una recta $L_1 \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L_1) = L_2$ siendo

$$L_2 : \begin{cases} 2.x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

¿Es única?

(14) Sean $A = (1, 1, 2)$ y $B = (2, 0, 2)$. Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 2\}$. Hallar $C \in \Pi$ tal que A, B y C formen un triángulo equilátero. ¿La solución es única?

(15) Considerar los puntos $A_1 = (2, 1, 0)$, $A_2 = (1, 2, 0)$, $A_3 = (0, 2, 1)$, $A_4 = (0, 1, 2)$, $A_5 = (1, 0, 2)$, $A_6 = (2, 0, 1)$. Verificar que están contenidos en un plano (encontrar su ecuación implícita), y que son los vértices de un hexágono regular. Deducir cuánto mide un ángulo interior de un hexágono regular, y hallar el centro del hexágono.
Dibujar.

(16) Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A_1 = (1, -1, 0)$ y $A_2 = (1, 1, 1)$. Encontrar tres hiperplanos H (no todos paralelos entre sí) tales que $\mathrm{d}(A_1, H) = \mathrm{d}(A_2, H)$.

(17) (a) Calcular la distancia entre el plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$, $\pi : (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 1)$, y la recta $L \subset \mathbb{R}^3$, $L : (1, 0, 0) + \gamma(1, 1, 1)$.
(b) Calcular la distancia entre las rectas $L, L' \subset \mathbb{R}^3$, donde $L : (1, 0, 1) + \lambda(0, 1, 0)$ y $L' : (1, 1, 0) + \mu(1, 1, 1)$.
(c) Calcular la distancia entre los planos $\pi = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 1, x_3 + x_4 = 1\}$ y $\pi' = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_3 = 1, x_2 + x_4 = 1\}$.

(18) Sea en $\mathbb{R}^3$ el producto interno $\langle\, , \,\rangle$ definido en la base canónica por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3.x_1 - 2.x_2 - 3.x_3$. Hallar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x) = \langle x, v\rangle$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$.

(19) Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$
(b) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$
(c) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y

$$||f||_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) $f : \mathbb{R}_{<3}[X] \to \mathbb{R}_{<3}[X]$, $f(p) = p'$ (donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$).
(e) $P \in GL(n,\mathbb{C})$, $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(A) = P^{-1}.A.P$ (donde $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$).

(20) Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}\ (f))^\perp$.

(21) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y)$$

Hallar un producto interno $<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que f sea autoadjunta para $<,>$.

(22) Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $P : V \to V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

(23) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

(24) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(25) Encontrar una base ortonormal B de $\mathbb{R}^2$ tales que $||f||_B$ y $||g||_B$ sean diagonales si las matrices de f y de g en la base canónica son

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

el cero.

(26) Sea $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^*)$$

Dada $M \in V$ definimos el endomorfismo $T_M : V \to V$ por $T_M(A) = MA$. Probar que T_M es unitario si y solo si M es unitaria.

(27) Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$
(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.