

# Álgebra Lineal

PRIMER CUATRIMESTRE 2002

## PRÁCTICA 2

### TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES

- (1) Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de  $\mathbb{K}^{n \times n}$  y calcular su dimensión.
- (a)  $S_1 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / A = A^t\}$  (matrices simétricas)
  - (b)  $S_2 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / A = -A^t\}$  (matrices antisimétricas)
  - (c)  $S_3 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$  (matrices triangulares superiores)
  - (d)  $S_4 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$  (matrices diagonales)
  - (e)  $S_5 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}\}$  (matrices escalares)
  - (f)  $S_6 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / \text{tr}(A) = 0\}$
  - (g)  $S_7 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\}$  (matrices estrictamente triangulares inferiores)
- (2) Sean  $S_1, S_2, S_3, S_5, S_6$  y  $S_7$  los subespacios del ejercicio anterior.
- (a) Probar que  $\mathbb{K}^{n \times n} = S_3 \oplus S_7$ .
  - (b) Probar que, si  $2 \neq 0$  en  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K}^{n \times n} = S_1 \oplus S_2$ .
  - (c) Probar que, si  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{K}^{n \times n} = S_5 \oplus S_6$ .
- (3) Sean  $m, n$  y  $r \in \mathbb{N}$ . Probar:
- (a) Si  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{K}^{n \times r}$  y  $C \in \mathbb{K}^{r \times s}$ , entonces  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
  - (b) Si  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $B, C \in \mathbb{K}^{n \times r}$ , entonces  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  - (c) Si  $I_r \in \mathbb{K}^{r \times r}$  denota la matriz identidad y  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , entonces  $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$
  - (d) Si  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{K}^{n \times r}$  con  $B = (b_{ij})$ , sea  $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$  para  $1 \leq j \leq r$  (la columna  $j$ -ésima de  $B$ ), entonces  $A \cdot B = (A \cdot B_1 | \dots | A \cdot B_r)$  (es decir,  $A \cdot (B_j)$  es la columna  $j$ -ésima de  $(A \cdot B)$ ).
  - (e) Sean  $A, A' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ;  $B, B' \in \mathbb{K}^{n \times m}$ ;  $C, C' \in \mathbb{K}^{m \times n}$  y  $D, D' \in \mathbb{K}^{m \times m}$ .  
Sea  $M, M' \in \mathbb{K}^{(n+m) \times (n+m)}$  definidas por
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$
Entonces 
$$M \cdot M' = \begin{pmatrix} A \cdot A' + B \cdot C' & A \cdot B' + B \cdot D' \\ C \cdot A' + D \cdot C' & C \cdot B' + D \cdot D' \end{pmatrix}$$
- (4) (a) Probar que,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , el producto de matrices en  $\mathbb{K}^{n \times n}$  no es conmutativo.  
(b) Caracterizar el conjunto  $\{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / A \cdot B = B \cdot A \ \forall B \in \mathbb{K}^{n \times n}\}$ .  
(c) Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Probar que el conjunto  $S$  de todas las matrices que conmutan con  $A$  es un subespacio de  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Probar que  $I_n \in S$  y que  $A^j \in S \ \forall j \in \mathbb{N}$ .  
(d) Sea  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  diagonal. Caracterizar el conjunto de todas las matrices  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  que conmutan con  $B$ . Considerar primero el caso en que todos los elementos de la diagonal de  $B$  sean iguales, luego considerar el caso en que todos los elementos de la diagonal sean distintos entre sí y por último considerar el caso en que algunos de los elementos sean iguales y otros no.  
(e) Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  con  $n \geq 2$ . Probar que el conjunto  $\{I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2-1}\}$  es linealmente dependiente.  
(f) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre  $A$  y  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  para que
  - a)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
  - b)  $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$- (g) Probar que si  $A$  y  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  no necesariamente vale  $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$

(5) Sean  $A, A' \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ;  $B \in \mathbb{K}^{n \times r}$ ;  $D, D' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ;  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Probar:

  - (a)  $(A + A')^t = A^t + (A')^t$
  - (b)  $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
  - (c)  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
  - (d)  $\text{tr}(D + D') = \text{tr}(D) + \text{tr}(D')$
  - (e)  $\text{tr}(\alpha D) = \alpha \text{tr}(D)$
  - (f)  $\text{tr}(D \cdot D') = \text{tr}(D' \cdot D)$ . (¿Hace falta que las matrices sean cuadradas?)

(6) Sean  $A$  y  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

  - (a) Probar que si  $A$  y  $B$  son triangulares superiores,  $A \cdot B$  es triangular superior.
  - (b) Probar que si  $A$  y  $B$  son diagonales,  $A \cdot B$  es diagonal.

- (c) Probar que si  $A$  es estrictamente triangular superior,  $A^n = 0$ .
- (7) Sea  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
- Probar que  $A \cdot A^t$  y  $A^t \cdot A$  son simétricas. Encontrar un ejemplo donde  $A \cdot A^t \neq A^t \cdot A$ .
  - El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?
  - Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , probar que  $A = 0 \iff A \cdot A^t = 0 \iff \text{tr}(A \cdot A^t) = 0$
- (8) Sea  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$  y  $B, C \in \mathbb{K}^{n \times m}$ . Probar
- $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$
  - $A \cdot B = 0 \Rightarrow B = 0$
- (9) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa
- $A, B \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \Rightarrow A + B \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$
  - $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \iff A^t \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$
  - $\text{tr}(A) = 0 \Rightarrow A \notin \text{GL}(n, \mathbb{K})$
  - $A$  nilpotente (es decir,  $\exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0$ )  $\Rightarrow A \notin \text{GL}(n, \mathbb{K})$
- (10) (a) Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  fija. Probar que el conjunto  $G_A = \{B \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) / BAB^t = A\}$  es un subgrupo de  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$  (es decir,  $I_n \in G_A$ , si  $B \in G_A$  entonces  $B^{-1} \in G_A$  y si  $B, B' \in G_A$  entonces  $B \cdot B' \in G_A$ ).
- (b) Definimos  $O_n = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} / B \cdot B^t = I_n\}$ . Probar que  $O_n \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$  y es un subgrupo.
- (11) Para cada  $i, j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), sea  $E^{ij} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  la siguiente matriz

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las matrices  $E^{ij}$  se llaman **matrices canónicas** de  $\mathbb{K}^{n \times n}$ .

- (a) Si  $a \in \mathbb{K} - \{0\}$  y  $1 \leq i \leq n$ , se define  $M_i(a) \in \mathbb{K}^{n \times n}$  como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + \dots + a \cdot E^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + \dots + E^{nn} = I_n + (a - 1) \cdot E^{ii}$$

Escribir todas las posibles  $M_i(a)$  para  $n = 2, 3, 4$  ( $a \in \mathbb{K}$ )

- (b) Sean  $1 \leq i, j \leq n$ , con  $i \neq j$ . Se define la matriz  $P^{ij} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  como la matriz que se obtiene permutando la fila  $i$  con la fila  $j$  de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}$$

Escribir todas las posibles  $P^{ij}$  para  $n = 2, 3, 4$ . ¿Cuántas son las  $P^{ij}$  para  $n$  general?

- (c) Sean  $1 \leq i, j \leq n$ , con  $i \neq j$  y  $a \in \mathbb{K}$ . Se define la matriz  $T^{ij}(a) \in \mathbb{K}^{n \times n}$  como

$$T^{ij}(a) = I_n + a \cdot E^{ij}$$

Escribir todas las posibles  $T^{ij}(a)$  para  $n = 2, 3, 4$  ( $a \in \mathbb{K}$ )

Las matrices  $M_i(a)$ ,  $P^{ij}$  y  $T^{ij}(a)$  se llaman **matrices elementales** de  $\mathbb{K}^{n \times n}$ .

- (12) Sean  $M_i(a)$ ,  $P^{ij}$  y  $T^{ij}(a)$  las matrices elementales de  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Probar:
- $M_i(a) \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$  con  $(M_i(a))^{-1} = M_i(\frac{1}{a})$
  - $P^{ij} \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$  con  $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$
  - $T^{ij} \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$  con  $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$
- (13) Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ ,  $A = (a_{ij})$  y sea  $F_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) la  $i$ -ésima fila de  $A$ , es decir,  $F_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$  y  $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ . Sean  $E^{ij}$  las matrices canónicas y sean  $M_i(a)$ ,  $P^{ij}$  y  $T^{ij}(a)$  las matrices elementales de  $\mathbb{K}^{n \times n}$ .

Probar

(a) Si  $A' = E^{ij} \cdot A$ , entonces  $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$  con  $F'_k = (0, \dots, 0)$  si  $k \neq i$  y  $F'_i = F_j$ .

(b) Si  $A' = M_i(a) \cdot A$ , entonces  $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$  con  $F'_k = F_k$  si  $k \neq i$  y  $F'_i = a \cdot F_i$ .

(c) Si  $A' = P^{ij} \cdot A$ , entonces  $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$  con  $F'_k = F_k$  si  $k \notin \{i, j\}$ ;  $F'_i = F_j$  y  $F'_j = F_i$ .

- (d) Si  $A' = T^{ij}(a) \cdot A$ , entonces  $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$  con  $F'_k = F_k$  si  $k \neq i$  y  $F'_i = F_i + a \cdot F_j$ .

Notar como conclusión de lo anterior que triangular por filas una matriz es multiplicar a izquierda por varias matrices elementales.

¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

- (14) (a) Sea  $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Calcular  $A^{20}$  y  $20 \cdot A$   
 (b) Calcular  $(P^{ij})^{15}$  y  $(P^{ij})^{16}$   
 (c) Sea  $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Calcular  $B^{20}$  y  $20 \cdot B$
- (15) Averiguar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

- (16) Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  y sea  $b \in \mathbb{K}^n$   
 (a) Probar que el sistema  $A \cdot x = b$  tiene solución única si y sólo si  $A \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K})$   
 (b) Probar que  $A \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K})$  si y sólo si las filas de  $A$  son linealmente independientes si y sólo si las columnas de  $A$  son linealmente independientes.
- (17) Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones  
 (a)  $A \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K})$ .  
 (b) Existe  $B \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K})$  tal que  $AB = I_n$ .  
 (c) Existe  $B \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K})$  tal que  $BA = I_n$ .  
 (d) La única matriz  $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$  que verifica  $AC = 0$  es  $C = 0$ .  
 (e) La única matriz  $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$  que verifica  $CA = 0$  es  $C = 0$ .
- (18) Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales  
 (a)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$   
 (b)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$   
 (c)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3, 0, 3x_2 + 2x_3)$   
 (d)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$   
 (e)  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = iz$  (considerando a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.)  
 (f)  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = i \cdot \operatorname{Im}(z)$  (considerando a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.)  
 (g)  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \bar{z}$  (como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.)  
 (h)  $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$   
 (i)  $f: \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (3a_{13} - a_{23}, a_{11} + 2a_{22} - a_{23}, a_{22} - a_{12})$   
 (j)  $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$   
 (k)  $f: \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  (considerando a  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.)
- (19) Interpretar geoméricamente las siguientes aplicaciones lineales  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 (a)  $f(x, y) = (x, 0)$   
 (b)  $f(x, y) = (0, y)$   
 (c)  $f(x, y) = (x, -y)$   
 (d)  $f(x, y) = (\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y))$   
 (e)  $f(x, y) = (-y, x)$   
 (f)  $f(x, y) = (x \cdot \cos t - y \cdot \operatorname{sen} t, x \cdot \operatorname{sen} t + y \cdot \cos t)$

- (20) (a) Encontrar una función  $f : V \rightarrow V$  (para un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$  conveniente) que cumpla  $f(v+w) = f(v) + f(w)$  para cualquier par de vectores  $v, w \in V$  pero que no sea una transformación lineal.  
 (b) Encontrar una función  $f : V \rightarrow V$  (para un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$  conveniente) que cumpla  $f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$  para cualquier escalar  $k \in \mathbb{K}$  y cualquier vector  $v \in V$  pero que no sea una transformación lineal.
- (21) Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:  
 (a)  $\text{tr} : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$   
 (b)  $t : \mathbb{K}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $t(A) = A^t$   
 (c)  $f : \mathbb{K}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{K}^{r \times m}$ ,  $f(A) = B \cdot A$  donde  $B \in \mathbb{K}^{r \times n}$   
 (d)  $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $D(f) = f'$   
 (e)  $\delta_\alpha : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\delta_\alpha(f) = f(\alpha)$  donde  $\alpha \in \mathbb{K}$   
 (f)  $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $s(\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$
- (22) (a) Probar que existe una única transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (-5, 3)$  y  $f(-1, 1) = (5, 2)$ . Para dicha  $f$ , determinar  $f(5, 3)$  y  $f(-1, 2)$   
 (b) ¿Existirá una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (2, 6)$ ;  $f(-1, 1) = (2, 1)$  y  $f(2, 7) = (5, 3)$ ?  
 (c) Sean  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  transformaciones lineales tales que  $f(1, 0, 1) = (1, 2, 1)$ ,  $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$ ,  $f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1)$ ,  $g(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$ ,  $g(2, 2, -1) = (3, -1, 2)$ , y  $g(3, 2, 1) = (0, 0, 1)$ . Determinar si  $f = g$ .  
 (d) Hallar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales exista una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga  $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$ ,  $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$  y  $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$
- (23) (a) Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada transformación lineal del ejercicio 18. Decidir en cada caso si  $f$  es epimorfismo, monomorfismo, isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular  $f^{-1}$   
 (b) Clasificar las transformaciones lineales  $\text{tr}$ ,  $t$ ,  $D$ ,  $\delta_\alpha$  y  $s$  del ejercicio 21 en epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o nada.
- (24) Sean  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$  y  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$ . Calcular el núcleo y la imagen de  $f$ , de  $g$  y de  $g \circ f$ . Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.
- (25) Sean  $g : V \rightarrow V'$  y  $f : V' \rightarrow V''$  transformaciones lineales. Probar  
 (a)  $\text{Nu}(g) \subseteq \text{Nu}(f \circ g)$   
 (b) Si  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ , entonces  $\text{Nu}(g) = \text{Nu}(f \circ g)$   
 (c)  $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$   
 (d) Si  $\text{Im}(g) = V'$ , entonces  $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$
- (26) (a) Sean  $S, T \subset \mathbb{R}^4$  definidos por

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \text{ y } T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}.$$

- ¿Existe algún isomorfismo  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $f(S) = T$ ?  
 (b) ¿Existe algún monomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ?  
 (c) ¿Existe algún epimorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ?  
 (d) Sean  $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $v_2 = (1, 1, 1, 0)$  y  $v_3 = (1, 1, 1, 1)$ . ¿Existe alguna transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \text{Im}(f)$ ?
- (27) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  que verifique  $\text{Im}(f) = S$  y  $\text{Nu}(f) = T$  en los siguientes casos  
 (a)  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ ,  $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$   
 (b)  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$ ,  $T = \langle (1, -2, 1) \rangle$
- (28) En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que verifique lo pedido:  
 (a)  $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$  y  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$   
 (b)  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$   
 (c)  $f \neq 0$  y  $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$   
 (d)  $f \neq 0$  y  $f \circ f = 0$   
 (e)  $f \neq Id$  y  $f \circ f = Id$   
 (f)  $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$ ,  $\text{Im}(f) \neq \{0\}$  y  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

- (29) Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Se define la aplicación  $\alpha_B : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  de la siguiente manera

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad \alpha_B(v) = (x_1, \dots, x_n)$$

Probar que  $\alpha_B$  es un isomorfismo.

Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación  $\alpha_B$  es tomar coordenadas en la base  $B$ , esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

- (a)  $\{w_1, \dots, w_s\}$  es linealmente independiente en  $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_s)\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{K}^n$
  - (b)  $\{w_1, \dots, w_r\}$  es un sistema de generadores de  $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_r)\}$  es un sistema de generadores de  $\mathbb{K}^n$
  - (c)  $\{w_1, \dots, w_n\}$  es una base de  $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_n)\}$  es una base de  $\mathbb{K}^n$
  - (d) Por ejemplo, para decidir si  $\{X^2 - X + 1, X^2 - 3X + 5, 2X^2 + 2X - 3\}$  es una base de  $\mathbb{R}_2[X]$ , bastará ver si  $\{(1, -1, 1), (1, -3, 5), (2, 2, -3)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ , para lo que se puede usar el método de triangulación.
- (30) Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Probar que  $f \circ f = f \iff f(v) = v \quad \forall v \in \text{Im}(f)$ .

Una transformación lineal que cumple esto se llama **proyector**.

- (31) En cada uno de los siguientes casos construir un proyector  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cumpla
- (a)  $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
  - (b)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
  - (c)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$
- (32) Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y  $f : V \rightarrow V$  un proyector. Probar
- (a)  $V = \text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$ ,
  - (b)  $g = id_V - f$  es un proyector con  $\text{Im}(g) = \text{Nu}(f)$  y  $\text{Nu}(g) = \text{Im}(f)$ .
- (33) Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sean  $S$  y  $T$  subespacios de  $V$  tales que  $V = S \oplus T$ . Probar que existe un único proyector  $f : V \rightarrow V$  tal que  $\text{Nu}(f) = S$  e  $\text{Im}(f) = T$ .
- (34) Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Se dice que  $f$  es nilpotente si  $\exists s \in \mathbb{N} / f^s = 0$
- (a) Probar que si  $f$  es nilpotente, entonces  $f$  no es ni monomorfismo ni epimorfismo.
  - (b) Si  $V$  es de dimensión  $n$  probar que  $f$  es nilpotente  $\iff f^n = 0$  (Sugerencia: considerar si las inclusiones  $\text{Nu}(f^i) \subseteq \text{Nu}(f^{i+1})$  son estrictas o no).
  - (c) Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Se define la transformación lineal  $f : V \rightarrow V$  de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}$$

Probar que  $f^n = 0$  y  $f^{n-1} \neq 0$ .

- (d) Si  $V = \mathbb{R}^n$ , para cada  $i, 2 \leq i \leq n$  construir una transformación lineal nilpotente  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f^i = 0$  y  $f^{i-1} \neq 0$ .
- (35) Sea  $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ .
- (a) Hallar una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\text{Nu}(f) = S$ .
  - (b) Hallar ecuaciones para  $S$  (usar el ítem anterior)
  - (c) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea  $\langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle + \langle (0, 1, 1, 2) \rangle$ .
- (36) (a) Sea  $S \subseteq \mathbb{K}^n$  el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo. Encontrar una transformación lineal  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  tal que  $\text{Nu}(f) = S$ .
- (b) Sea  $T \subseteq \mathbb{K}^n$  el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Encontrar una transformación lineal  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  y  $x \in \mathbb{K}^n$  tales que  $T = f^{-1}(x)$ .