Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2002

Práctica 4

Espacio Dual

(1) Sea $S \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ el subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* \,/\, \varphi(1,-1,2) = 0\}$. Encontrar una base de S.

(2) Dada la base B del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, hallar su base dual en cada uno de los siguientes casos

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,-1),(2,0)\}$

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

(c) $V = \mathbb{R}_{<4}[X]$, $B = \{-X+2, X-1, X^2-3.X+2, X^3-3.X^2+2.X\}$

(3) Sea $B' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 \qquad \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3 \qquad \varphi_3(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3$$

Hallar la base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $B' = B^*$

(4) Sean f_1 , f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_{<3}[X])^*$ las siguientes formas lineales

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx \qquad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\,dx$$

Probar que $\{f_1 , f_2 , f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_{<3}[X])^*$. Hallar una base B de $\mathbb{R}_{<3}[X]$ tal que $B^* = \{f_1 , f_2 , f_3\}$

(5) Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2.x_1 + 3.x_2 - x_3$ y sea $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la canónica.

(a) Calcular las coordenadas de φ en E^*

(b) Calcular las coordenadas de φ en la base $B^* = \{\delta_1+\delta_2+\delta_3, \delta_1+\delta_2, \delta_1\}$

(c) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1,x_2,x_3)/2.x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $B \subset \mathbb{R}^3$ la base

$$B = \{(0,0,1),(0,1,-1),(1,-1,0)\}$$

Encontrar una ecuación para S en la base B.
(Sugerencia: notar que B^* es la base dual de B y no hacer ninguna cuenta)

(6) Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ la base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$. Encontrar las coordenadas de la base dual de B en la base dual de la canónica.

(7) Sean $B_1 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1,-3,2)$ respecto de B_1^*, calcular sus coordenadas respecto de B_2^*.

(8) Hallar una base de $S^\circ \subseteq V^*$ en los siguientes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = <(1,-1,2),(2,1,3),(1,5,0)>$

(b) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = <(1,1,-1,1),(2,-1,3,1)>$

(c) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \left\{(x_1,x_2,x_3) \,/\, \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2.x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$

(d) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - 2.x_3 + 3.x_4 = 0 \\ 4.x_1 - x_2 + 5.x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

(9) Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}/A.B = 0\}$.

Sea $f \in W^\circ$ tal que $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ y $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Calcular $f(B)$.

(10) Para los siguientes subespacios S y T de V, determinar una base de $(S+T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $S = <(1,1,-1,1),(2,-1,3,1)>$, $T = <(2,-4,8,0),(-1,1,2,3)>$

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$, $T = <(2,1,3,1)>$

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \left\{(x_1,x_2,x_3) \,/\, \begin{cases} x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\ 3.x_2 - 2.x_3 = 0 \end{cases} \right\}$,

$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$

(11) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

(12) Sea V un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial de dimensión n (p es un primo, luego $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo). Probar que

$$\#\{S \subseteq V \text{ subespacio } / \dim(S) = 1\} = \#\{S \subseteq V \text{ subespacio } / \dim(S) = n-1\}$$

Calcular dicho número.

(13) Sea $tr : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ la forma lineal traza y dado $a \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se define $f_a : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ como $f_a(x) = tr(a.x)$.
 (a) Probar que $f_a \in (\mathbb{K}^{n\times n})^* \ \forall a \in \mathbb{K}^{n\times n}$
 (b) Probar que $f_a(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow a = 0$
 (c) Se define $\gamma : \mathbb{K}^{n\times n} \to (\mathbb{K}^{n\times n})^*$ como $\gamma(a) = f_a$ Probar que γ es un isomorfismo.
 (d) Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3.a_{11} - 2.a_{12} + 5.a_{22}$$

 Encontrar una matriz $a \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ \gamma(a) = f$.

(14) Sea $\varphi \in (\mathbb{K}^{n\times n})^*$ tal que $\varphi(a.b) = \varphi(b.a) \ \forall \ a\,,\, b \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{K} \,/\, \varphi = \alpha.tr$$

Deducir que si $\varphi(a.b) = \varphi(b.a) \ \forall \ a\,,\, b \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\varphi(I_n) = n$ entonces $\varphi = tr$.

(15) Sean $\alpha_0, ..., \alpha_n \ \in \mathbb{K}\,, \alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Para cada i, $0 \leq i \leq n$ se define $\epsilon_{\alpha_i} : \mathbb{K}_{<n+1}[X] \to \mathbb{K}$ como $\epsilon_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$
 (a) Probar que $B' = \{\epsilon_{\alpha_0}, ..., \epsilon_{\alpha_n}\}$ es una base de $(\mathbb{K}_{<n+1}[X])^*$
 (b) Sea $B = \{P_0, ..., P_n\}$ la base de $\mathbb{K}_{<n+1}[X]$ tal que $B^* = B'$. Probar que el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^{n} \beta_i.P_i$$

 es el único polinomio en $\mathbb{K}[X]$ de grado menor o igual que n tal que, $\forall\ i$, $0 \leq i \leq n$, $P(\alpha_i) = \beta_i$. Este polinomio se llama el **polinomio interpolador de Lagrange.**
 (c) Probar que existen números reales $a_0, \ldots, a_n$ tales que, para todo $P \in \mathbb{R}_{<n+1}[X]$,

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i.P(\alpha_i).$$

 Hallar a_0, a_1 y a_2 en el caso en que $n = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

(16) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ y sea $f(x_1, x_2) = (2.x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2.x_2)$. Si $B_1 = \{(1,2),(1,3)\}$ y $B_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, calcular $||f^t||_{B_2^* B_1^*}$.

(17) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimension finita, sea $T : V \to V$ lineal y sea $c \in \mathbb{K}$. Supongamos que existe $v \in V$ no nulo tal que $T(v) = cv$. Probar que existe $f \in V^*$ no nula tal que $T^t(f) = cf$.

(18) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimension finita y $L : V \to V^{**}$ el isomorfismo natural que identifica a V con su doble dual. Sea S un subconjunto de V y sea $S^{\circ\circ} = (S^\circ)^\circ \subseteq V^{**}$. ¿Qué relación hay entre $L(S)$ y $S^{\circ\circ}$?

(19) Sea S un conjunto y sea $\mathbb{K}^S$ el $\mathbb{K}$-espacio vectorial de las funciones de S en $\mathbb{K}$ con las operaciones naturales. Sea W un subespacio de dimension n de $\mathbb{K}^S$. Demostrar que existen puntos $x_1, \ldots, x_n$ en S y funciones $f_1, \ldots, f_n$ en W tal que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.