

Álgebra Lineal

PRIMER CUATRIMESTRE 2002

PRÁCTICA 7

DIAGONALIZACION (SEGUNDA PARTE).

- (1) Dadas las siguientes matrices $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (a) $P = X - 1$, (b) $P = X^2 - 1$, (c) $P = (X - 1)^2$

(ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - i.X^2 + 1 + i$

- (2) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y sean P y $Q \in \mathbb{K}[X]$.
- (a) Si $a, b \in \mathbb{K}$, probar que $(a.P + b.Q)(A) = a.P(A) + b.Q(A)$
 - (b) Probar que $(P.Q)(A) = P(A).Q(A)$.
 - (c) Probar que $P^n(A) = (P(A))^n$
 - (d) ¿Es cierto que $P(A).Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ó $Q(A) = 0$?
 - (e) Si P y Q coprimos y $x \in \mathbb{K}^n$ es tal que $P(A).x = Q(A).x = 0$, probar que $x = 0$
- (3) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que si A y B son semejantes, entonces $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$. ¿Vale la recíproca?
- (4) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.
- (5) Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el característico):

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (6) Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:
- (a) $f: \mathbb{R}_{<3}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{<3}[X]$, $f(P) = P' + 2.P$
 - (b) $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(A) = A^t$
- (7) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular sus polinomios minimal y característico.

- (8) Sea $\delta: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal derivada. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.

- (9) Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

(a) Calcular $A^4 - 4.A^3 - A^2 + 2.A - 5.I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2 .

(d) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2.A^4 - 12.A^3 + 19.A^2 - 29.A - 37.I_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de I_2 .

(e) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1} , A^3 y A^{-3}

(f) Calcular $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- (10) Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f .
- (11) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $A^2 + I_n = 0$.
- (12) Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$ y $S \oplus T = V$. Si S y T son f -invariantes, probar que existe una base B de V y matrices $A_1 \in \mathbb{K}^{s \times s}$ y $A_2 \in \mathbb{K}^{t \times t}$ tales que

$$\|f\|_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Probar que, en este caso, $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{A_1} \cdot \mathcal{X}_{A_2}$. ¿Pasa lo mismo con los minimales?

- (13) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3y, 3x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f -invariantes.
- (14) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ . Probar que, para todo $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ -invariantes.
- (15) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$ -lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\|g_\theta\|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ -invariantes.

- (16) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f -invariante pero que no admite un complemento f -invariante.
- (17) (a) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.
 (b) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.
- (18) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que si A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_A(X) = X^k$. Calcular todos los autovalores de A . Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y el único autovalor de A es el 0, probar que A es nilpotente. ¿Qué pasa si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?
- (19) Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz de traza nula. Probar que A es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.