

Álgebra Lineal

PRIMER CUATRIMESTRE 2003

PRÁCTICA 2

MATRICES, TRANSFORMACIONES LINEALES Y VARIEDADES LINEALES

- (1) Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{K}^{n \times n}$ y calcular su dimensión.
- (a) $S_1 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / A = A^t\}$ (matrices simétricas)
 - (b) $S_2 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)
 - (c) $S_3 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)
 - (d) $S_4 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)
 - (e) $S_5 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}\}$ (matrices escalares)
 - (f) $S_6 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / \text{tr}(A) = 0\}$
 - (g) $S_7 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\}$ (matrices estrictamente triangulares inferiores)
- (2) Sean S_1, S_2, S_3, S_5, S_6 y S_7 los subespacios del ejercicio anterior.
- (a) Probar que $\mathbb{K}^{n \times n} = S_3 \oplus S_7$.
 - (b) Probar que, si $2 \neq 0$ en \mathbb{K} , $\mathbb{K}^{n \times n} = S_1 \oplus S_2$.
 - (c) Probar que, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , $\mathbb{K}^{n \times n} = S_5 \oplus S_6$.
- (3) Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$. Probar:
- (a) Si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times r}$ y $C \in \mathbb{K}^{r \times s}$, entonces $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
 - (b) Si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B, C \in \mathbb{K}^{n \times r}$, entonces $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
 - (c) Si $I_r \in \mathbb{K}^{r \times r}$ denota la matriz identidad y $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, entonces $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$
 - (d) Si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n \times r}$ con $B = (b_{ij})$, sea $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ para $1 \leq j \leq r$ (la columna j -ésima de B), entonces $A \cdot B = (A \cdot B_1 | \dots | A \cdot B_r)$ (es decir, $A \cdot (B_j)$ es la columna j -ésima de $(A \cdot B)$).
 - (e) Sean $A, A' \in \mathbb{K}^{n \times n}$; $B, B' \in \mathbb{K}^{n \times m}$; $C, C' \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $D, D' \in \mathbb{K}^{m \times m}$.
Sea $M, M' \in \mathbb{K}^{(n+m) \times (n+m)}$ definidas por
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$
Entonces
$$M \cdot M' = \begin{pmatrix} A \cdot A' + B \cdot C' & A \cdot B' + B \cdot D' \\ C \cdot A' + D \cdot C' & C \cdot B' + D \cdot D' \end{pmatrix}$$
- (4) (a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, el producto de matrices en $\mathbb{K}^{n \times n}$ no es conmutativo.
- (b) Caracterizar el conjunto $\{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / A \cdot B = B \cdot A \ \forall B \in \mathbb{K}^{n \times n}\}$.
- (c) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que el conjunto S de todas las matrices que conmutan con A es un subespacio de $\mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que $I_n \in S$ y que $A^j \in S \ \forall j \in \mathbb{N}$.
- (d) Sea $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonal. Caracterizar el conjunto de todas las matrices $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ que conmutan con B . Considerar primero el caso en que todos los elementos de la diagonal de B sean iguales, luego considerar el caso en que todos los elementos de la diagonal sean distintos entre sí y por último considerar el caso en que algunos de los elementos sean iguales y otros no.
- (e) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con $n \geq 2$. Probar que el conjunto $\{I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2-1}\}$ es linealmente dependiente.
- (f) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ para que
- (i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 - (ii) $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$
- (g) Probar que si A y $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ no necesariamente vale $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$
- (5) Sean $A, A' \in \mathbb{K}^{m \times n}$; $B \in \mathbb{K}^{n \times r}$; $D, D' \in \mathbb{K}^{n \times n}$; $\alpha \in \mathbb{K}$. Probar:
- (a) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$

- (b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
- (c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- (d) $\text{tr}(D + D') = \text{tr}(D) + \text{tr}(D')$
- (e) $\text{tr}(\alpha D) = \alpha \text{tr}(D)$
- (f) $\text{tr}(D \cdot D') = \text{tr}(D' \cdot D)$. (¿Hace falta que las matrices sean cuadradas?)

- (6) Sean A y $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$
- (a) Probar que si A y B son triangulares superiores, $A \cdot B$ es triangular superior.
 - (b) Probar que si A y B son diagonales, $A \cdot B$ es diagonal.
 - (c) Probar que si A es estrictamente triangular superior, $A^n = 0$.

- (7) Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
- (a) Probar que $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A \cdot A^t \neq A^t \cdot A$.
 - (b) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?
 - (c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A \cdot A^t = 0 \iff \text{tr}(A \cdot A^t) = 0$

- (8) Sea $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ y $B, C \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Probar
- (a) $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$
 - (b) $A \cdot B = 0 \Rightarrow B = 0$

- (9) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa
- (a) $A, B \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \Rightarrow A + B \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$
 - (b) $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \iff A^t \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$
 - (c) $\text{tr}(A) = 0 \Rightarrow A \notin \text{GL}(n, \mathbb{K})$
 - (d) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0$) $\Rightarrow A \notin \text{GL}(n, \mathbb{K})$

- (10) (a) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ fija. Probar que el conjunto $G_A = \{B \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) / BAB^t = A\}$ es un subgrupo de $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ (es decir, $I_n \in G_A$, si $B \in G_A$ entonces $B^{-1} \in G_A$ y si $B, B' \in G_A$ entonces $B \cdot B' \in G_A$).
- (b) Definimos $O_n = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} / B \cdot B^t = I_n\}$. Probar que $O_n \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$ y es un subgrupo.

- (11) Para cada i, j ($1 \leq i, j \leq n$), sea $E^{ij} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ la siguiente matriz

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las matrices E^{ij} se llaman **matrices canónicas** de $\mathbb{K}^{n \times n}$.

- (a) Si $a \in \mathbb{K} - \{0\}$ y $1 \leq i \leq n$, se define $M_i(a) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + \dots + a \cdot E^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + \dots + E^{nn} = I_n + (a - 1) \cdot E^{ii}$$

Escribir todas las posibles $M_i(a)$ para $n = 2, 3, 4$ ($a \in \mathbb{K}$)

- (b) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$. Se define la matriz $P^{ij} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}$$

Escribir todas las posibles P^{ij} para $n = 2, 3, 4$. ¿Cuántas son las P^{ij} para n general?

- (c) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$ y $a \in \mathbb{K}$. Se define la matriz $T^{ij}(a) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + a \cdot E^{ij}$$

Escribir todas las posibles $T^{ij}(a)$ para $n = 2, 3, 4$ ($a \in \mathbb{K}$)

Las matrices $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ se llaman **matrices elementales** de $\mathbb{K}^{n \times n}$.

- (12) Sean $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ las matrices elementales de $\mathbb{K}^{n \times n}$. Probar:

- (a) $M_i(a) \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ con $(M_i(a))^{-1} = M_i(\frac{1}{a})$
- (b) $P^{ij} \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ con $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$
- (c) $T^{ij} \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ con $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$

- (13) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $A = (a_{ij})$ y sea F_i ($1 \leq i \leq n$) la i -ésima fila de A , es decir, $F_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$ y $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$. Sean E^{ij} las matrices canónicas y sean $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ las matrices elementales de $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Probar

- (a) Si $A' = E^{ij} \cdot A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = (0, \dots, 0)$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_j$.
- (b) Si $A' = M_i(a) \cdot A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = a \cdot F_i$.
- (c) Si $A' = P^{ij} \cdot A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \notin \{i, j\}$; $F'_i = F_j$ y $F'_j = F_i$.
- (d) Si $A' = T^{ij}(a) \cdot A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_i + a \cdot F_j$.

Notar como conclusión de lo anterior que triangular por filas una matriz es multiplicar a izquierda por varias matrices elementales.

¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

- (14) (a) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Calcular A^{20} y $20 \cdot A$
 (b) Calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$
 (c) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Calcular B^{20} y $20 \cdot B$
- (15) Averiguar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

- (16) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y sea $b \in \mathbb{K}^{n \times 1}$
 (a) Probar que el sistema $A \cdot x = b$ tiene solución única si y sólo si $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$
 (b) Probar que $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ si y sólo si las filas de A son linealmente independientes si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.
- (17) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones
 (a) $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$.
 (b) Existe $B \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $AB = I_n$.
 (c) Existe $B \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $BA = I_n$.
 (d) La única matriz $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ que verifica $AC = 0$ es $C = 0$.
 (e) La única matriz $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ que verifica $CA = 0$ es $C = 0$.
- (18) Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales
 (a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$
 (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$

- (c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3, 0, 3x_2 + 2x_3)$
- (d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$
- (e) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = iz$ (considerando a \mathbb{C} como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial.)
- (f) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = i \cdot \text{Im}(z)$ (considerando a \mathbb{C} como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial.)
- (g) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ (como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial.)
- (h) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- (i) $f : \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (3a_{13} - a_{23}, a_{11} + 2a_{22} - a_{23}, a_{22} - a_{12})$
- (j) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
- (k) $f : \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (considerando a $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial.)
- (19) Interpretar geoméricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- (a) $f(x, y) = (x, 0)$
- (b) $f(x, y) = (0, y)$
- (c) $f(x, y) = (x, -y)$
- (d) $f(x, y) = (\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y))$
- (e) $f(x, y) = (-y, x)$
- (f) $f(x, y) = (x \cdot \cos t - y \cdot \sin t, x \cdot \sin t + y \cdot \cos t)$
- (20) (a) Encontrar una función $f : V \rightarrow V$ (para un \mathbb{K} -espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(v + w) = f(v) + f(w)$ para cualquier par de vectores $v, w \in V$ pero que no sea una transformación lineal.
- (b) Encontrar una función $f : V \rightarrow V$ (para un \mathbb{K} -espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$ para cualquier escalar $k \in \mathbb{K}$ y cualquier vector $v \in V$ pero que no sea una transformación lineal.
- (21) Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:
- (a) $\text{tr} : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$
- (b) $t : \mathbb{K}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{K}^{m \times n}$, $t(A) = A^t$
- (c) $f : \mathbb{K}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{K}^{r \times m}$, $f(A) = B \cdot A$ donde $B \in \mathbb{K}^{r \times n}$
- (d) $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) = f'$
- (e) $\delta_\alpha : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$, $\delta_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in \mathbb{K}$
- (f) $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $s(\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$
- (22) (a) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f , determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$
- (b) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?
- (c) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f(1, 0, 1) = (1, 2, 1)$, $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$, $f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $g(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$, $g(2, 2, -1) = (3, -1, 2)$, y $g(3, 2, 1) = (0, 0, 1)$. Determinar si $f = g$.
- (d) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$
- (23) (a) Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada transformación lineal del ejercicio 18. Decidir en cada caso si f es epimorfismo, monomorfismo, isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}
- (b) Clasificar las transformaciones lineales tr , t , D , δ_α y s del ejercicio 21 en epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o nada.

- (24) Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f , de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.
- (25) Sean $g : V \rightarrow V'$ y $f : V' \rightarrow V''$ transformaciones lineales. Probar
- $\text{Nu}(g) \subseteq \text{Nu}(f \circ g)$
 - Si $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\text{Nu}(g) = \text{Nu}(f \circ g)$
 - $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$
 - Si $\text{Im}(g) = V'$, entonces $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$
- (26) (a) Sean $S, T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por
- $$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \text{ y } T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}.$$
- ¿Existe algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?
- ¿Existe algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$?
 - ¿Existe algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$?
 - Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existe alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \text{Im}(f)$?
- (27) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique $\text{Im}(f) = S$ y $\text{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos
- $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$
 - $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, -2, 1) \rangle$
- (28) En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:
- $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$ y $\dim(\text{Im}(f)) = 1$
 - $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$
 - $f \neq 0$ y $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$
 - $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$
 - $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$
 - $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$
- (29) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Se define la aplicación $\alpha_B : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ de la siguiente manera

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \alpha_B(v) = (x_1, \dots, x_n)$$

Probar que α_B es un isomorfismo.

Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación α_B es tomar coordenadas en la base B , esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

- $\{w_1, \dots, w_s\}$ es linealmente independiente en $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_s)\}$ es linealmente independiente en \mathbb{K}^n
 - $\{w_1, \dots, w_r\}$ es un sistema de generadores de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_r)\}$ es un sistema de generadores de \mathbb{K}^n
 - $\{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_n)\}$ es una base de \mathbb{K}^n
 - Por ejemplo, para decidir si $\{X^2 - X + 1, X^2 - 3X + 5, 2X^2 + 2X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$, bastará ver si $\{(1, -1, 1), (1, -3, 5), (2, 2, -3)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , para lo que se puede usar el método de triangulación.
- (30) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que $f \circ f = f \iff f(v) = v \forall v \in \text{Im}(f)$.

Una transformación lineal que cumple esto se llama **proyector**.

- (31) En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla

- (a) $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- (b) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- (c) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

(32) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $f : V \rightarrow V$ un proyector. Probar

- (a) $V = \text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$,
- (b) $g = id_V - f$ es un proyector con $\text{Im}(g) = \text{Nu}(f)$ y $\text{Nu}(g) = \text{Im}(f)$.

(33) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $f : V \rightarrow V$ tal que $\text{Nu}(f) = S$ e $\text{Im}(f) = T$.

(34) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que f es nilpotente si $\exists s \in \mathbb{N} / f^s = 0$

- (a) Probar que si f es nilpotente, entonces f no es ni monomorfismo ni epimorfismo.
- (b) Si V es de dimensión n probar que f es nilpotente $\iff f^n = 0$ (Sugerencia: considerar si las inclusiones $\text{Nu}(f^i) \subseteq \text{Nu}(f^{i+1})$ son estrictas o no).
- (c) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Se define la transformación lineal $f : V \rightarrow V$ de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}$$

Probar que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

- (d) Si $V = \mathbb{R}^n$, para cada i , $2 \leq i \leq n$ construir una transformación lineal nilpotente $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f^i = 0$ y $f^{i-1} \neq 0$.

(35) Sea $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

- (a) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu}(f) = S$.
- (b) Hallar ecuaciones para S (usar el item anterior)
- (c) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $\langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle + \langle (0, 1, 1, 2) \rangle$.

(36) (a) Sea $S \subseteq \mathbb{K}^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones. Encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ tal que $\text{Nu}(f) = S$.

- (b) Sea $T \subseteq \mathbb{K}^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo de m ecuaciones. Encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ y $x \in \mathbb{K}^m$ tales que $T = f^{-1}(x)$.

(37) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $v, w \in V$; $v \neq w$. Sea $S = \langle v - w \rangle$ y sea $M = v + S$. Probar la validez de las siguientes afirmaciones:

- (a) v y w están en M .
- (b) $M = w + S$
- (c) Si $M' \subseteq V$ es una variedad lineal tal que $v, w \in M'$ entonces $M \subseteq M'$.
- (d) $M = \{\lambda.w + \mu.v / \lambda, \mu \in \mathbb{K}; \lambda + \mu = 1\}$

(38) Probar que cada uno de los siguientes conjuntos son variedades lineales y calcular su dimensión

- (a) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2.x_1 - x_3 = 1 \text{ y } x_2 + x_3 = -2\}$
- (b) $M_2 = \{(1, 2, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- (c) $M_3 = \{P \in \mathbb{Q}_{<3}[X] / P'(2) = 0\}$
- (d) $M_4 = \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} / \text{tr}(A) = 5\}$

(39) (a) Sea $L \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por los puntos $(2, -1, 0)$ y $(1, 3, -1)$. Hallar una variedad lineal M de dimensión 2 que contenga a L . ¿Es M única?

- (b) Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2.x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y sea $L = \langle (0, 1, 1) \rangle + \langle (1, 1, 0) \rangle$. Hallar una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que $M \cap \Pi = L$.

(40) Determinar la dimensión de la variedad lineal

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + 3.x_3 = 0, 2.x_1 + x_2 + x_3 = 1, -x_1 + x_2 + a.x_3 = 0\}$$

de acuerdo a los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

- (41) Hallar ecuaciones implícitas para las siguientes variedades lineales:
- (a) $M = \langle (1, 2, 1), (2, 0, 1) \rangle + (1, 1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.
 - (b) $M \subseteq \mathbb{R}^4$ la mínima variedad que contiene a $(1, 1, 2, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 4, 1)$.
- (42) (a) Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y sea $b \in \mathbb{K}^m$ tal que $\text{rg}(A|b) = \text{rg}(A)$. Probar que las soluciones de la ecuación $A.x = b$ forman una variedad lineal y calcular su dimensión. ¿Qué pasa si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b)$?
- (b) Sea $M \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad lineal. Probar que existe $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$ para algún m conveniente tal que $M = \{x \in \mathbb{K}^n / A.x = b\}$.
- (43) Sea $L = \langle (2, 1, 1) \rangle + (0, -1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.
- (a) Hallar un plano P tal que $0 \in P$ y $L \subseteq P$.
 - (b) ¿Existirá un plano P' tal que $L \subseteq P'$, $0 \in P'$ y $(0, 0, 1) \in P'$ simultáneamente?
- (44) Encontrar en \mathbb{R}^3 dos rectas alabeadas que pasen por $(1, 2, 1)$ y $(2, 1, 1)$ respectivamente. Encontrar en \mathbb{R}^4 dos planos alabeados que pasen por $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1, 1)$ respectivamente. ¿Hay planos alabeados en \mathbb{R}^3 ? Más generalmente, si V es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y M_1 y M_2 son variedades lineales alabeadas en V ¿qué se puede decir de sus dimensiones?
- (45) En cada uno de los siguientes casos, decidir si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, son paralelas o alabeadas. En cada caso, hallar $M_1 \cap M_2$ y calcular las dimensiones. Calcular también la dimensión de la menor variedad lineal que contiene a M_1 y a M_2 .
- (a) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
 $M_2 = \langle (1, 0, 1) \rangle + (0, 0, -3)$
 - (b) $M_1 = \langle (1, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle + (1, 2, 2, -1)$
 $M_2 = \langle (1, 0, 1, 1), (2, 2, 1, 0) \rangle + (-1, 4, 2, -3)$
 - (c) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - 1 = x_3 + x_4 = 0\}$
 $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 = x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0\}$