Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre 2003

Práctica 6

Autovalores y Autovectores. Diagonalizacion.

(1) Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos. Analizar por separado los casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R})$$

$$\text{(iv)} A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(v) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(vi) } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R})$$

$$\text{(vii)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R}) \quad \text{(viii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(ix) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Para cada una de las matrices A del ejercicio anterior, sea U una base de $\mathbb{K}^n$ y sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ la tranformación lineal tal que $||f||_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de $\mathbb{K}^n$ tal que $||f||_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(U, B)$.

(3) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 2.y + 2.z, y, -x - 3.y - 4.z)$$

Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $||f||_B$ sea diagonal.

(4) (a) Sean A, C y $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $A = DCD^{-1}$. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n = DC^nD^{-1}$.

(b) Calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

(c) ¿ Existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$?

(5) (a) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Determinar todos los a , b y $c \in \mathbb{K}$ para los que A es diagonalizable.

(b) Probar que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{\,2\times 2}$ es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

(6) Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: no intentar calcular el polinomio característico.

(7) Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene a $(1, -1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$ y, además, $\mathcal{X}_A \in \mathbb{Q}[X]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿Es A única?

(8) (a) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2.A$ son -1, 3 y 8.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3.I_4$. Hallar los restantes autovalores de A.

(9) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

(10) Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector correspondiente.

(11) Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un proyector con dim(Im(f))=s. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?

(12) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo incluido en $\mathbb{C}$ y sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un morfismo nilpotente. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?

(13) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que verifica $A^2 + I_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.

(14) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

(15) Sea $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz inversible y diagonal. Sea $f : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ la transformación lineal definida por $f(A) = D^{-1}AD$. Hallar los autovalores y los autovectores de f y probar que es diagonalizable.

(16) Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de $\mathbb{C}^n$ tal que $||f||_B$ es triangular superior.

(17) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ las raíces de $\mathcal{X}_A$ contadas con multiplicidad. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ y que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(18) Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$.
   (a) Probar que las matrices $\begin{pmatrix} A.B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & B.A \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}$ son semejantes.
   (b) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{A.B} = \mathcal{X}_{B.A}$

(19) Dadas las siguientes matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$.

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ (a)\ P = X - 1, \ (b)\ P = X^2 - 1, \ (c)\ P = (X-1)^2$$

$$(ii)\ A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \ P = X^3 - i.X^2 + 1 + i$$

(20) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sean P y $Q \in \mathbb{K}[X]$.
   (a) Si $a, b \in \mathbb{K}$, probar que $(a.P + b.Q)(A) = a.P(A) + b.Q(A)$
   (b) Probar que $(P.Q)(A) = P(A).Q(A)$.
   (c) Probar que $P^n(A) = (P(A))^n$
   (d) ¿Es cierto que $P(A).Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ó $Q(A) = 0$?
   (e) Si P y Q coprimos y $x \in \mathbb{K}^n$ es tal que $P(A).x = Q(A).x = 0$, probar que $x = 0$

(21) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que si A y B son semejantes, entonces $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$. ¿Vale la recíproca?

(22) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

(23) Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el característico):

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(24) Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

(a) $f : \mathbb{R}_{<3}[X] \to \mathbb{R}_{<3}[X]$, $f(P) = P' + 2.P$

(b) $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^t$

(25) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular sus polinomios minimal y característico.

(26) Sea $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal derivada. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.

(27) Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

(a) Calcular $A^4 - 4.A^3 - A^2 + 2.A - 5.I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

(d) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2.A^4 - 12.A^3 + 19.A^2 - 29.A - 37.I_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de I_2.

(e) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1} , A^3 y A^{-3}

(f) Calcular $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(28) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

(29) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^2 + I_n = 0$.

(30) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$ y $S \oplus T = V$. Si S y T son f-invariantes, probar que existe una base B de V y matrices $A_1 \in \mathbb{K}^{s\times s}$ y $A_2 \in \mathbb{K}^{t\times t}$ tales que

$$||f||_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Probar que, en este caso, $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{A_1}.\mathcal{X}_{A_2}$. ¿Pasa lo mismo con los minimales?

(31) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3.y, 3.x - 2.y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

(32) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ. Probar que, para todo $\theta \neq k.\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

(33) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz en la base canónica es

$$||g_\theta||_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ-invariantes.

(34) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una tranformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f-invariante pero que no admite un complemento f-invariante.

(35) (a) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.

(b) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4+4X^3+8X^2+8X+4$. Decidir si A es diagonalizable.

(36) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que si A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_A(X) = X^k$. Calcular todos los autovalores de A. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y el único autovalor de A es el 0, probar que A es nilpotente. ¿Qué pasa si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(37) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de traza nula. Probar que A es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.