

Álgebra Lineal
PRIMER CUATRIMESTRE 2003
PRÁCTICA 7
FORMA DE JORDAN

- (1) Dadas las matrices A y A' en $\mathbb{K}^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A' .
 (b) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{<n-1}[X]$ tal que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A' .
- (2) ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices en $\mathbb{C}^{8 \times 8}$ cuyo minimal es x^3 ? ¿Y en $\mathbb{R}^{8 \times 8}$?
- (3) Probar que dos matrices en $\mathbb{C}^{6 \times 6}$ nilpotentes con igual polinomio minimal e igual rango son semejantes. ¿Es cierto en $\mathbb{C}^{7 \times 7}$?
- (4) Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9 \times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (5) Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, con

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

- (6) Decidir si existen y en caso afirmativo exhibir matrices A tales que
 (a) $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$, nilpotente y $(\text{rg}(A), \text{rg}(A^2), \text{rg}(A^3), \text{rg}(A^4), \text{rg}(A^5)) = (6, 4, 3, 1, 0)$.
 (b) $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$, $m_A(X) = X^5$, $(\text{rg}(A), \text{rg}(A^2), \text{rg}(A^3), \text{rg}(A^4), \text{rg}(A^5)) = (9, 5, 3, 1, 0)$. ¿Cuántas clases de semejanza de matrices hay que verifiquen esto?
- (7) Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ con polinomio minimal $m_A = x^6$. Si $\{v_1, \dots, v_6\}$ es una base de Jordan para A , encontrar la forma y una base de Jordan para A^2, A^3, A^4 y A^5 .
- (8) Sea $f \in \text{End}(V)$ y $\mathcal{X}_f = \prod_{i=1}^t p_i^{m_i}$ la descomposición de su característico en factores primos. Sea $\tilde{p}_i = \mathcal{X}_f / p_i^{m_i}$, y considérense polinomios q_i tales que $1 = \sum_{i=1}^t \tilde{p}_i q_i$.
 (a) Probar que para cada i , $(\tilde{p}_i q_i)(f)$ es un proyector.
 (b) Probar que $\text{Im}(\tilde{p}_i q_i)(f) = \{v \in V \mid \exists m : p_i^m(f)(v) = 0\}$.

- (9) Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Encontrar proyectores sobre los espacios $V^p := \{v \in V \mid \exists m : p^m(f)(v) = 0\}$ para p los factores irreducibles del polinomio característico de f .

- (10) Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial, $f \in \text{End}(V)$, λ un autovalor de f y $V^\lambda = V^{(x-\lambda)}$ definido como en el ejercicio 9 y $V_n^\lambda = \ker((f - \lambda)^n)$. Sea $h \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio cualquiera. Probar que
 (a) $\ker(h(f))$ e $\text{Im}(h(f))$ son subespacios f -invariantes.

- (b) Si λ es raíz de h entonces $V_1^\lambda \subseteq \ker(h(f))$.
- (c) Si λ es raíz de multiplicidad n de h entonces $V_n^\lambda \subseteq \ker(h(f))$.
- (d) Si λ no es raíz de h entonces $V_1^\lambda \subseteq \text{Im}(h(f))$.
- (e) Probar que, en este caso, $V^\lambda \subseteq \text{Im}(h(f))$.

(11) Probar que dos matrices en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ son semejantes si y solo si tienen igual característico e igual minimal.
 ¿Vale esto en $\mathbb{C}^{3 \times 3}$? ¿Y en $\mathbb{C}^{4 \times 4}$?

(12) Encontrar la forma y una base de Jordan para las siguientes matrices:

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ | (e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ | (h) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ |
| (b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ | (f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ | (i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ |
| (c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ | (g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | (j) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ |
| (d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ | | |

(13) Sea $V \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio generado por e^x , xe^x , x^2e^x y e^{2x} . Hallar la forma y una base de Jordan para el endomorfismo $t(f) = f'$.

(14) Encontrar todas las formas de Jordan posibles para una matriz A tal que

- (a) $\mathcal{X}_A(X) = (X - 2)^4(X - 3)^2$, $m_A(X) = (X - 2)^2(X - 3)^2$.
- (b) $\mathcal{X}_A(X) = (X - 7)^5$, $m_A(X) = (X - 7)^2$.
- (c) $\mathcal{X}_A(X) = (X - 2)^7$, $m_A(X) = (X - 2)^3$.
- (d) $\mathcal{X}_A(X) = (X - 3)^4(X - 5)^4$, $m_A(X) = (X - 3)^2(X - 5)^2$.

(15) Encontrar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ con tres autovalores λ_1 , λ_2 y λ_3 , que verifica $\text{rg}(A - \lambda_1 Id) = 13$, $\text{rg}(A - \lambda_1 Id)^2 = 11$, $\text{rg}(A - \lambda_1 Id)^3 = 10$, $\text{rg}(A - \lambda_1 Id)^4 = 10$, $\text{rg}(A - \lambda_2 Id) = 13$, $\text{rg}(A - \lambda_2 Id)^2 = 11$, $\text{rg}(A - \lambda_2 Id)^3 = 10$, $\text{rg}(A - \lambda_2 Id)^4 = 9$, $\text{rg}(A - \lambda_3 Id) = 13$, $\text{rg}(A - \lambda_3 Id)^2 = 12$, $\text{rg}(A - \lambda_3 Id)^3 = 11$.

(16) Hallar la forma de Jordan de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

(17) Sea $J = J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz-bloque de Jordan de $n \times n$.

- (a) Calcular J^m . (**Sugerencia:** descomponer $J = D + N$, donde D es escalar y N es nilpotente; notar que conmutan y aplicar el binomio de Newton).
- (b) Encontrar una relación entre J^m y las $(n - 1)$ primeras derivadas de la función x^m .
- (c) Calcular $f(J)$, donde $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ es un polinomio.
- (d) Sea $f = \sum_{i=0}^\infty a_i x^i$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $> |\lambda|$. Probar que la serie $f(J) = \sum_{i=0}^\infty a_i J^i$ converge y encontrar la expresión de $f(J)$ en términos de las derivadas de f .

- (e) Calcular e^J , $\text{sen}(J)$, $\text{cos}(J)$.
- (f) Calcular e^A , $\text{sen}(A)$ y $\text{cos}(A)$ para A alguna de las matrices del ejercicio 12.
- (18) Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior pero para tJ , donde $t \in \mathbb{R}$ es tal que el radio de convergencia de f es $> |t\lambda|$.
- (19) Probar que si A y B conmutan entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.
- (20) Probar que en $\mathbb{C}^{n \times n}$ toda matriz es semejante a su transpuesta.
- (21) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz tal que $a_{ij} = x_i y_j$ para vectores $x, y \in \mathbb{K}^n$. Calcular el rango de A y sus autovalores. Probar que es diagonalizable.
- (22) Sea (a_n) una sucesión definida por $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ y $a_{n+2} = \lambda a_{n+1} + \mu a_n$ si $n \geq 0$. Escribir el vector $(a_{n+2}, a_{n+1})^t$ como $A \cdot (a_{n+1}, a_n)^t$ para cierta matriz A . Encontrar (a_{n+2}, a_{n+1}) en términos de α y β para $\lambda = \mu = 1$ (sucesión de Fibonacci). Hacer lo propio con $\lambda = 4$, $\mu = -4$.