ALGEBRA LINEAL

Práctica 1: Espacios vectoriales

1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $k \in \mathbb{K}$, $v \in$ V. Probar las siguientes afirmaciones:

   (i) $0v = \vec{0}$
   (ii) $k\vec{0} = \vec{0}$
   (iii) $(-1)v = -v$
   (iv) $-(-v) = v$
   (v) $kv = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ó $v = \vec{0}$
   (vi) $-\vec{0} = \vec{0}$

2. Probar en cada caso que el conjunto V, con la suma y el producto por escalares definidos, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$:

   (i) V $= \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)/a_i \in \mathbb{K}\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$.
      a. $+ : (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$
      b. $. : k.(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k.a_i)_{i\in\mathbb{N}}$
   (ii) Dado X un conjunto, sea V = $\mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K}$ tal que f es una función$\}$.
      a. $+ : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in X$
      b. $. : (k.f)(x) = k.f(x) \quad \forall\, x \in X$

3. Caracterizar geométricamente todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$.

4. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como $\mathbb{K}$-espacio vectorial:

   (i) $\mathrm{S}_1 = \{v \in \mathbb{R}^3/v = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 1)\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}$, V $= \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   (ii) $\mathrm{S}_2 = \{ai/a \in \mathbb{R}\}$, V $= \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
   (iii) $\mathrm{S}_3 = \{f \in \mathbb{K}[X]/f = 0$ ó $\mathrm{gr} f \geq 2\}$, V = $\mathbb{K}$[X]
   (iv) $\mathrm{S}_4 = \{f \in \mathbb{K}[X]/f = 0$ ó $\mathrm{gr} f \leq 5\}$, V = $\mathbb{K}$[X]
   (v) $\mathrm{S}_5 = \{M \in \mathbb{K}^{4\times4} \,/\, M^t = M\}$, V $= \mathbb{K}^{4\times4}$
   (vi) $\mathrm{S}_6 = \{M \in \mathbb{K}^{3\times3} \,/\, \mathrm{tr}(M) = 0\}$, V $= \mathbb{K}^{3\times3}$
   (vii) $\mathrm{S}_7 = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, V $= \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   (viii) $\mathrm{S}_8 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f''(1) = f(2)\}$, V $= \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   (ix) Dados a y $b \in \mathbb{R}$ fijos, $\mathrm{S}_9 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f'' + af' + bf = 0\}$, V $= \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   (x) $\mathrm{S}_{10} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,/\, \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, V $= \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   (xi) $\mathrm{S}_{11} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \,\exists\, k \in \mathbb{N}$, tal que $a_r = 0\ \forall\, r \geq k\}$, V $= \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

5. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ y sea $S = \{x \in \mathbb{K}^m : Ax = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es A. Probar que S es un subespacio de $\mathbb{K}^m$.

6. Sean S y T subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V:

   (i) Probar que $S \cap T$ es un subespacio de V.

   (ii) Encontrar S y T subespacios de $V = \mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.

   (iii) Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V $\iff$ $S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

7. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$:

   (i) $\mathbb{K}^n$

   (ii) $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}] = \{f \in \mathbb{K}[X] \,/\, f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \leq n\}$

   (iii) $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

   (iv) $\mathbb{K}^{n\times n}$

   (v) $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (vi) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0 \;;\; x - y = 0\}\, \mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (vii) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,/\, A = -A^t\}\, \mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (viii) $S_3 = \{f \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \,/\, f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}\,, \mathbb{K} = \mathbb{R}$

   (ix) $S_4 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f''' = 0\}$, $K = \mathbb{R}$

8. Sea $S = < (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) > \;\subseteq \mathbb{R}^4$.

   (i) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$

   (ii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

   (iii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$

9. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean v_1 , v_2 , v_3 $\in$ V.
   Probar que si $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$ entonces $< v_1 , v_2 , v_3 >=< v_3 >$.

10. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

    (i) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v\,,\,w\;\in$ V. Entonces $< v\,,\,w >=< v\,,\,w+5v >$

    (ii) Sean $v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,,\,v_4\,,\,w\;\in\mathbb{R}^7$ tales que $< v_1\,,\,v_2\,,\,w >=< v_3\,,\,v_4\,,\,w >$.
    Entonces $< v_1\,,\,v_2 >=< v_3\,,\,v_4 >$

    (iii) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,,\,w\;\in$ V.
    $< v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,,\,w >=< v_1\,,\,v_2\,,\,v_3 > \Longleftrightarrow\; w \in< v_1\,,\,v_2\,,\,v_3 >$

11. Probar que $\{f\in C^\infty(\mathbb{R})\,/\,f''+f=0\} =< senx\,,\,cosx >$.

    (Sugerencia: Probar que si $f''+f=0$, entonces $\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})senx}{cosx}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.)

12. Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$:

    (i) $(1,2,3)\,,\,(2,3,1)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

    (ii) $(1-i,i)\,,\,(2,-1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

    (iii) $(1-X)^3\,,\,(1-X)^2\,,\,1-X\,,\,1$ en $\mathbb{K}[X]$

    (iv) $f(x)=\mathrm{sen}x\,,\,g(x)=\mathrm{cos}x$ en $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

    (v) $f(x)=e^x\,,\,g(x)=x\,,\,h(x)=e^{-x}$ en $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

    (vi) $u=(1,0,1,0,1,\dots)\,,\,v=(0,1,0,1,0,\dots)\,,\,w=(1,1,0,1,1,0,\dots)$ en $\mathbb{K}^\mathbb{N}$

13. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Probar:

    (i) $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n\}\subseteq V$ son l. i. $\Longleftrightarrow$ $\{v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n\}\subseteq V$ son l. i.

    (ii) $\lambda\in\mathbb{K}\,,\;\lambda\neq 0$
    $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_n\}\subseteq$ V son l. i. $\Longleftrightarrow$ $\{v_1,\dots,\lambda v_i,\dots,v_n\}\subseteq$ V son l. i.

    (iii) $\lambda\in\mathbb{K}$
    $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n\}\subseteq$ V son l. i. $\Longleftrightarrow$ $\{v_1,\dots,v_i+\lambda v_j,\dots,v_j,\dots,v_n\}\subseteq$ V son l. i. Notar que i), ii) y iii) justifica el "método de triangulación" para analizar la dependencia o independencia lineal de vectores en $\mathbb{K}^n$.

14. Hallar todos los $k\in\mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ es un conjunto linealmente independiente:

    (i) $\{(1,2,k)\,,\,(1,1,1)\,,\,(0,1,1-k)\}$

    (ii) $\{(k,1,0)\,,\,(3,-1,2)\,,\,(k,2,-2)\}$

15. Hallar una base y la dimensión de los siguientes $\mathbb{K}$-espacios vectoriales

    (i) $< (1,4,-2,1)\,,\,(1,-3,-1,2)\,,\,(3,-8,-2,7) >$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
    (ii) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\,/\,x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
    (iii) $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$
    (iv) $\{f\in\mathbb{R}[X]\,/\,f=0$ ó $\mathrm{gr}(f)\le 3$ y $f(2)=f(-1)\}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
    (v) $\{f\in\mathbb{R}[X]\,/\,f=0$ ó $\mathrm{gr}(f)\le 3$ y f es un múltiplo de $(x^2-2)\}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
    (vi) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\,/\,a_i=a_j\ \forall\, i,j\,\}$

16. (i) Probar que el conjunto $\{(1,0,0)\,,\,(0,i,0)\,,\,(1,1,i)\}$ es base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Calcular la dimensión de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
    (ii) Probar que el conjunto $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
    (iii) Probar que $\{e_1,\ldots,e_n,ie_1,\ldots,ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

17. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V indicado:

    (i) $\{(1,1,1,1)\,,\,(0,2,1,1)\}$, V = $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
    (ii) $\{X^3-2X+1\,,\,X^3+3X\}$, V = $\mathbb{R}_3$[X] , $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
    (iii) $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\i&1\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}0&i\\1&1\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\right\}$, V $=\mathbb{C}^{2\times 2}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

18. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores:

    (i) S = $< (1,1,2)\,,\,(1,3,5)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1) > \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
    (ii) S = $< X^2+2X+1\,,\,X^2+3X+1\,,\,X+2 > \subseteq \mathbb{R}$[X] , $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
    (iii) S = $\left\langle \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}0&i\\1&1\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

19. Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k\in\mathbb{R}$ en los siguientes casos:

    (i) S = $< (1,k,1)\,,\,(-1,k,1)\,,\,(0,1,k) > \subset \mathbb{R}^3$
    (ii) S = $\left\langle \begin{pmatrix}1&k\\-1&2\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}k&1\\0&2k\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$
    (iii) S = $\{x\in\mathbb{R}^3/Ax=0\}$ siendo $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A=\begin{pmatrix}1&-k&-1\\-1&1&k^2\\1&k&k-2\end{pmatrix}$$

20. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales
$$< (-2,1,6),(3,0,-8) > = < (1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k) >.$$

21. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V. Determinar si la suma es directa:

    (i) V = $\mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z)/3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x,y,z)/x + z = 0\}$
    (ii) V = $\mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z)/3x - 2y + z = 0\,,\ x - y = 0\}$ y $T = < (1,1,0),(5,7,3) >$
    (iii) V = $\mathbb{R}^3$, $S = < (1,1,3),(1,3,5),(6,12,24) >$ y $T = < (1,1,0),(3,2,1) >$
    (iv) V = $\mathbb{R}$[X] , $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f(1) = 0\}$ y $T = < 1\,,\ \mathrm{X}\,,\ \mathrm{X}^2\,,\ \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}\,,\ \mathrm{X}^5 >$
    (v) V = $\mathbb{R}$[X] , $S = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]/f'(0) = f''(0) = 0\}$

22. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = < (0,1,1) >$, siendo
$S = \{x \in \mathbb{R}^3/x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = < (1,k,2),(-1,2,k) >$.

23. (i) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f$ es constante$\}$. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y que $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
    (ii) Sean $S = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,/\, A = A^t\}$ y $T = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \,/\, A = -A^t\}$ (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*). Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $S \oplus T = \mathbb{K}^{n\times n}$.

24. Para cada S dado hallar T $\subseteq$ V tal que S $\oplus$ T = V (en este caso, T se dice un *suplemento* de S con respecto a V):

    (i) S = $< (1,2,-1,3)\,,\ (2,3,-2,1)\,,\ (0,1,0,7) >$, V = $\mathbb{R}^4$
    (ii) S = $\{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \,/\, \mathrm{tr}(A) = 0\}$, V = $\mathbb{R}^{4\times 4}$
    (iii) S = $< 3, 1 + X^2 >$, V = $\mathbb{R}_4$[X]

25. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

    (i) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, dim S = dim T = 2 $\Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in$ S $\cap$ T
    (ii) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^5$, dim S = dim T = dim W = 2 $\Rightarrow$ dim (S $\cap$ T $\cap$ W) ≥ 1

26. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n-1$):

    (i) Probar que $\forall\, v \notin$ T , T $\oplus < v >=$ V.
    (ii) Si S es un subespacio de V tal que S $\not\subseteq$ T, probar que S + T = V.
    Calcular dim (S $\cap$ T).
    (iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir dim (S $\cap$ T).

27. Encontrar las coordenadas de $v \in$ V respecto de la base B en los siguientes casos:

    (i) $\mathrm{V} = \mathbb{K}^n$; $v = (x_1, \ldots, x_n)$ y $B = E$ la base canónica
    (ii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$; $v = (1,2,-1)$ y $B = \{(1,2,-1),(0,1,1),(0,0,2)\}$

(iii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$

(iv) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$

(v) $\mathrm{V} = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3\,,\, 1 + X\,,\, X^2 + 5\,,\, X^3 + X^2\}$

(vi) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

28. En cada uno de los siguientes casos, calcular $C(B, B')$, hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B':

    (i) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$, $v = (2, 3)$

    (ii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$, $v = (-1, 5, 6)$

    (iii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3\,,\, 1 + X\,,\, X^2\}$, $B' = \{1\,,\, X + 3\,,\, X^2 + X\}$, $v = X$

    (iv) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$, $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$

    (v) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$
    E^{ij} es la matriz que tiene un 1 en el lugar ij y 0 en todos los demás lugares.
    $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

29. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sean B , B' y B'' bases de V.
    Probar que $C(B, B'') = C(B', B'')C(B, B')$. Deducir que $C(B, B')$ es una matriz inversible con $C(B, B')^{-1} = C(B', B)$.

30. Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ dos bases de $\mathbb{K}^n$. Sea M la matriz cuyas columnas son $v_1, \ldots, v_n$ y sea N la matriz cuyas columnas son $w_1, \ldots, w_n$ (ordenadamente). Probar que $C(B, B') = N^{-1}M$.

31. Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(x) = f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,\}$ (funciones pares) y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(-x) = -f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,\}$ (funciones impares).

    Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.