

ALGEBRA LINEAL

Práctica 2: Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

- (i) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3, 0, 3x_2 + 2x_3)$
- (ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$
- (iii) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ (considerando a \mathbb{C} como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial.)
- (iv) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- (v) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
- (vi) $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

2. Interpretar geoméricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

- (i) $f(x, y) = (x, 0)$
- (ii) $f(x, y) = (0, y)$
- (iii) $f(x, y) = (x, -y)$
- (iv) $f(x, y) = (\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y))$
- (v) $f(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$

3. Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:

- (i) $tr : K^{n \times n} \rightarrow K$
- (ii) $t : K^{n \times m} \rightarrow K^{m \times n}$, $t(A) = A^t$
- (iii) $f : K^{n \times m} \rightarrow K^{r \times m}$, $f(A) = BA$ donde $B \in K^{r \times n}$
- (iv) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(f) = f'$
- (v) $\Phi : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$
- (vi) $\epsilon_\alpha : K[X] \rightarrow K$, $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$

4. (i) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f , determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$
- (ii) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?
- (iii) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1)$,
- (iv) $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$, $f(1, 0, 1) = (1, 2, 1)$, $g(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$, $g(2, 2, -1) = (3, -1, 2)$ y $g(3, 2, 1) = (0, 0, 1)$. Determinar si $f = g$.
- (v) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

5. (i) Calcular el núcleo y la imagen de cada transformación lineal de los Ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1} .
- (ii) Clasificar las transformaciones lineales tr , t y ϵ_α del Ejercicio 3 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.
6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$ Calcular el núcleo y la imagen de f , de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.
7. Sean $g : V \rightarrow V'$ y $f : V' \rightarrow V''$ transformaciones lineales. Probar:
- (i) $\text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(f \circ g)$
- (ii) Si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f \circ g)$
- (iii) $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$
- (iv) Si $\text{Im}(g) = V'$, entonces $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$
8. (i) ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$?
- (ii) Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \text{Im}(f)$?
- (iii) ¿Existirá algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$?
- (iv) Sean $S, T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$. ¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?
- (v) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique $\text{Im}(f) = S$ y $\text{Ker}(f) = T$ en los siguientes casos:
- a. $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$
- b. $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, -2, 1) \rangle$
9. En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:
- (i) $(1, 1, 0) \in \text{Ker}(f)$ y $\dim(\text{Im}(f)) = 1$
- (ii) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$
- (iii) $f \neq 0$ y $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Im}(f)$
- (iv) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$
- (v) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$
- (vi) $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$, $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$
10. Sea $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
- (i) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Ker}(f) = S$.
- (ii) Hallar ecuaciones para S (usar i))
- (iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $\langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle + (0, 1, 1, 2)$

11. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Se define la aplicación $\alpha_B : V \rightarrow K^n$ de la siguiente manera: si $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ entonces

$$\alpha_B(v) := (x_1, \dots, x_n)$$

Probar que α_B es un isomorfismo. Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación α_B es tomar coordenadas en la base B , esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

- (i) $\{w_1, \dots, w_s\}$ es linealmente independiente en $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_s)\}$ es linealmente independiente en K^n
 - (ii) $\{w_1, \dots, w_r\}$ es un sistema de generadores de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_r)\}$ es un sistema de generadores de K^n
 - (iii) $\{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_n)\}$ es una base de K^n Por ejemplo, para decidir si $\{X^2 - X + 1, X^2 - 3X + 5, 2X^2 + 2X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$, bastará ver si $\{(1, -1, 1), (1, -3, 5), (2, 2, -3)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , para lo que se puede usar el método de triangulación.
12. Sea V un K -espacio vectorial y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. f se llama un *proyector* si y sólo si $f \circ f = f$.
Probar que $f : V \rightarrow V$ es un proyector $\iff f(v) = v \quad \forall v \in \text{Im}(f)$.
13. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla:
- (i) $\text{Ker}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (-2, 1, 1) \rangle$
 - (ii) $\text{Ker}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$
14. Sea V un K -espacio vectorial y sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Probar que
- (i) $V = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
 - (ii) Sea V es un K -espacio vectorial de dimensión n y sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $f : V \rightarrow V$ tal que $\text{Ker}(f) = S$ e $\text{Im}(f) = T$.
15. Dada $f : V \rightarrow V$, calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:
- (i) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$
 - a. $B = B'$ la base canónica de \mathbb{R}^3 .
 - b. $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$.
 - (ii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$
 - a. $B = B'$ la base canónica de \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} -espacio vectorial.
 - b. $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a \mathbb{C}^2 como \mathbb{R} -espacio vectorial.
 - (iii) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$

- a. $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.
 b. $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.
 (iv) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
16. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B' ?
 (ii) Hallar una base de $\text{Ker}(f)$ y una base de $\text{Im}(f)$.
 (iii) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.
17. En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que verifique:
- (i) $A \neq I_3$ y $A^3 = I_3$
 (ii) $A \neq 0$; $A \neq I_3$ y $A^2 = A$
18. Mostrar, en cada uno de los siguientes casos, una matriz A con coeficientes reales de manera que el sistema $Ax = b$ cumpla:
- (i) No tiene solución o tiene solución única, dependiendo del valor de b .
 (ii) Tiene infinitas soluciones, independientemente del valor de b .
 (iii) No tiene solución o tiene infinitas soluciones, dependiendo del valor de b .
 (iv) Tiene solución única, independientemente del valor de b .
19. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j ; i \leq \dim(\text{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: Recordar que, si f es un proyector, $V = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.)

20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por
 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3)$.

- (i) Determinar bases B y B' de \mathbb{R}^3 tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices inversibles C y D tales que

$$CAD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iv) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

23. (i) Sea $A \in K^{m \times n}$ y sea $S = \{x \in K^n / Ax = 0\}$. Probar que $\text{rg}(A) + \dim(S) = n$.
(Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes).
- (ii) Sean $A \in K^{m \times n}$ y $b \in K^m$. Se considera el sistema $Ax = b$ y sea $(A|b)$ su matriz ampliada. Probar que $Ax = b$ tiene solución $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.

24. Sean $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times r}$. Probar que

$$\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A) \text{ y } \text{rg}(AB) \leq \text{rg}(B).$$

25. Sea $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ y consideremos los siguientes subespacios:

$$\begin{aligned} S &= \langle 1 + x + x^2 + x^3; 1 + x - x^2 - x^3; 1 - x + x^2 - x^3; 2 - 2x^3 \rangle \\ T &= \langle 1 - x - x^2 + x^3; 2 - 2x; 3 - x + x^2 + x^3 \rangle \end{aligned}$$

- (i) Encontrar bases para $S \cap T$ y $S + T$.
- (ii) Encontrar un subespacio H tal que $S + T = S \oplus H$.