

## ALGEBRA LINEAL

## Práctica 3: Espacio Dual

1. Sea  $S \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$  el subespacio  $S = \{\psi \in (\mathbb{R}^3)^* / \psi(1, -1, 2) = 0\}$ . Encontrar una base de  $S$ .
2. Dadas las bases  $B$  del  $K$ -espacio vectorial  $V$ , hallar sus bases duales:

(i)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $B = \{(1, -1), (2, 0)\}$

(ii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

(iii)  $V = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $B = \{-X + 2, X - 1, X^2 - 3X + 2, X^3 - 3X^2 + 2X\}$

3. Sea  $B' = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$  la base de  $(\mathbb{R}^3)^*$  definida por

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \quad \psi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 \quad \psi_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Hallar la base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $B' = B^*$

4. Sean  $f_1, f_2$  y  $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$  las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx \quad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x) dx$$

Probar que  $\{f_1, f_2, f_3\}$  es una base de  $(\mathbb{R}_2[X])^*$ . Hallar una base  $B$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  tal que  $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$

5. Sea  $V$  un  $\mathbb{Z}_p$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ . Probar que:

$$\#\{S \subseteq V \text{ subespacio} / \dim(S) = 1\} = \#\{S \subseteq V \text{ subespacio} / \dim(S) = n - 1\}$$

Calcular dicho número.

6. Sea  $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$  definida por  $\psi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$  y sea  $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$  la base dual de la canónica.

(i) Calcular las coordenadas de  $\psi$  en  $E^*$

(ii) Calcular las coordenadas de  $\psi$  en la base  $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$

(iii) Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  el subespacio  $S = \{(x_1, x_2, x_3) / 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$  y sea  $B \subset \mathbb{R}^3$  la base  $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$ . Encontrar una ecuación para  $S$  en la base  $B$  (Sugerencia: notar que  $B^*$  es la base dual de  $B$  y no hacer ninguna cuenta.)

7. Sea  $B \subset \mathbb{R}^2$  la base  $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ . Encontrar las coordenadas de la base dual de  $B$  en la base dual de la canónica.

8. Sean  $B$  y  $B_1$  las bases de  $\mathbb{R}^3$  definidas por

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ y } B_1 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$$

Si  $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$  tiene coordenadas  $(1, -3, 2)$  respecto de  $B^*$ , calcular sus coordenadas respecto de  $B_1^*$ .

9. Hallar una base de  $S^\circ \subseteq V^*$  en los siguientes casos:

(i)  $V = \mathbb{R}^3$  y  $S = \langle (1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, 5, 0) \rangle$

(ii)  $V = \mathbb{R}^4$  y  $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$

(iii)  $V = \mathbb{R}^3$  y  $S = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_3 = 0 \text{ y } 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

(iv)  $V = \mathbb{R}^4$  y  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \text{ y } 4x_1 - x_2 + 5x_4 = 0\}$

10. Sea  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y sea  $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / AB = 0\}$ .

Sea  $f \in W^\circ$  tal que  $f(I_2) = 0$  y  $f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ . Calcular  $f(B)$ .

11. Para los siguientes subespacios  $S$  y  $T$  de  $V$ , determinar una base de  $(S + T)^\circ$  y una base de  $(S \cap T)^\circ$

(i)  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$ ,  $T = \langle (2, -4, 8, 0), (-1, 1, 2, 3) \rangle$

(ii)  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 - x_3 = 0, \text{ y } x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$ ,  $T = \langle (2, 1, 3, 1) \rangle$

(iii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \text{ y } 3x_2 - 2x_3 = 0\}$   
 $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 - x_2 = 0\}$

12. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y sean  $S$  y  $T$  subespacios tales que  $V = S \oplus T$ . Probar que  $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$ .

13. Sea  $tr : K^{n \times n} \rightarrow K$  la forma lineal traza y dado  $a \in K^{n \times n}$  se define

$f_a : K^{n \times n} \rightarrow K$  como  $f_a(x) = tr(ax)$ .

(i) Probar que  $f_a \in (K^{n \times n})^* \forall a \in K^{n \times n}$

(ii) Probar que  $f_a(x) = 0 \forall x \in K^{n \times n} \Rightarrow a = 0$

(iii) Se define  $\gamma : K^{n \times n} \rightarrow (K^{n \times n})^*$  como  $\gamma(a) = f_a$  Probar que  $\gamma$  es un isomorfismo.

(iv) Sea  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3a_{11} - 2a_{12} + 5a_{22}$$

Encontrar una matriz  $a \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \gamma(a) = f$ .

14. Sea  $\psi \in (K^{n \times n})^*$  tal que  $\psi(ab) = \psi(ba) \forall a, b \in K^{n \times n}$ . Probar que  $\exists \alpha \in K / \psi = \alpha \cdot tr$ . Deducir que si  $\psi(ab) = \psi(ba) \forall a, b \in K^{n \times n}$  y  $\psi(I_n) = n$  entonces  $\psi = tr$ .

15. Sean  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$ ,  $\alpha_i \neq \alpha_j$  si  $i \neq j$ . Para cada  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$  se define  $\epsilon_{\alpha_i} : K_n[X] \rightarrow K$  como  $\epsilon_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$

(i) Probar que  $B_1 = \{\epsilon_{\alpha_0}, \dots, \epsilon_{\alpha_n}\}$  es una base de  $(K_n[X])^*$

(ii) Sea  $B = \{P_0, \dots, P_n\}$  la base de  $K_n[X]$  tal que  $B^* = B_1$ . Probar que el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^n \beta_i \cdot P_i$$

es el único polinomio en  $K[X]$  de grado menor o igual que  $n$  tal que,  $\forall i, 0 \leq i \leq n$ ,  $P(\alpha_i) = \beta_i$ . Este polinomio se llama el **polinomio interpolador de Lagrange**.

16. Sean  $V$  y  $W$   $K$ -espacios vectoriales y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Se define la función  $f^t : W^* \rightarrow V^*$  de la siguiente manera:

$$f^t(\psi) = \psi \circ f \quad \forall \psi \in W^*$$

$f^t$  se llama la función **transpuesta** de  $f$ .

(i) Probar que  $f^t$  es una transformación lineal.

(ii) Probar que  $(\text{Im}(f))^\circ = \text{Ker}(f^t)$  y que  $\text{Im}(f^t) = (\text{Ker}(f))^\circ$

(iii) Sean  $V = \mathbb{R}^2$  y  $W = \mathbb{R}^3$  y sea  $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$

Si  $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$  y  $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ , calcular  $|f|_{BB_1}$  y  $|f^t|_{B_1^*B^*}$ .

(iv) Si  $B$  y  $B_1$  son bases finitas de  $V$  y  $W$  respectivamente, probar que

$$|f^t|_{B_1^*B^*} = (|f|_{BB_1})^t$$

17. Sea  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita. Sean  $v_1, \dots, v_n$  en  $V$  vectores no nulos. Probar que existe una forma lineal  $f \in V^*$  /  $f(v_i) \neq 0 \quad \forall i, 1 \leq i \leq n$ .

18. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $K$ .  $f, g : V \rightarrow K$  transformaciones lineales no nulas. Probar que:

$$\exists \alpha \in K, \alpha \neq 0 / f = \alpha g \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$$