ALGEBRA LINEAL

Práctica 4: Determinantes

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

2. (i) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$

   (ii) Calcular el determinante de $A \in K^{n\times n}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (i) Si $A \in K^{n\times n}$, $B \in K^{m\times m}$ y $C \in K^{n\times m}$, sea $M \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ la matriz de bloques definida por $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Probar que $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

   (ii) Sean $r_1 , r_2 , \dots , r_n \in \mathbb{N}$ y para cada i , $1 \le i \le n$ sea $A_i \in K^{r_i\times r_i}$.

   Calcular $\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$.

4. Calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

5. Probar que el determinante de la matriz $A \in K^{n\times n}$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

es igual a $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$. (Por esta causa, la matriz A se llama la matriz **compañera del polinomio** $P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$.)

6. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}$$

7. Dadas las matrices A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $AC = CB$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

8. (i) Sean $v_1 = (a, b, c)$ y $v_2 = (d, e, f)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Probar que la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

(ii) Con las mismas notaciones del ítem anterior, probar que si $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente, $\varphi(x, y, z) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $< v_1, v_2 >$.

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ y sea $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B = (b_{ij})$ una matriz tal que det $(A + B) =$ det $(A - B)$. Probar que B es inversible si y sólo si $b_{11} \neq b_{21}$.

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Probar que el sistema $Ax = 0$ tiene solución única si y sólo si a , b , c y d no son todos iguales a cero. Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

11. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita. Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.

12. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} cos & 0 & -sen \\ 0 & 1 & 0 \\ sen & 0 & cos \end{pmatrix}$

13. Sea A una matriz inversible. Calcular $\det\big(\mathrm{adj}\, A\big)$ ¿Qué pasa si A no es inversible?

14. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre $\mathbb{R}$ empleando la regla de Cramer:

i) $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 & = & -3 \\ x_1 + 7x_2 & = & 4 \end{array} \right.$ ii) $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 2 \end{array} \right.$

iii) $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Se sabe que $\det \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & e & f \\ 5 & h & i \end{pmatrix} = 0$ $\det \begin{pmatrix} a & 2 & c \\ d & 4 & f \\ g & 10 & i \end{pmatrix} = 0$, y $\det \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ d & e & -2 \\ g & h & -5 \end{pmatrix} = 0$. Calcular $\det A$.

16. Sea $A \in K^{m\times n}$

    (i) Probar que son equivalentes:

        a. rg $(A) \geq s$

        b. A admite una submatriz de $s \times s$ con determinante no nulo

    (ii) Deducir que rg $(A) = \text{máx}\,\{s \in \mathbb{N}_0$ / A admite una submatriz de $s \times s$ con determinante no nulo$\}$

17. Sea $A \in K^{3\times 3}$ no inversible tal que $A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31} \neq 0$. Calcular la dimensión de $S = \{x \in K^3 / Ax = 0\}$.

18. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varphi_i \in (\mathbb{R}_n[X])^*$ talque $\varphi_i(p) = p^i(\alpha)$, donde p^i es la derivada i-ésima de p. Probar que:

    (i) $C = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ es una base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

    (ii) Hallar B base de $\mathbb{R}_n[X]$ tal que $B^* = C$.

    (iii) Sea $\psi \in (\mathbb{R}_n[X])^*$, definida por $\psi(p) = \int_0^1 p(t)dt$. Encontrar sus coordenadas en la base C.