ALGEBRA LINEAL

Práctica 7: Espacios vectoriales con producto interno

1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

   (i) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K$, $\Phi(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

   (ii) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x,y) = x_1\overline{y}_1 - ix_1\overline{y}_2 + ix_2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$

   (iii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K$, $\Phi(x,y) = 3x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2 + x_1\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

2. (i) Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

   $$\Phi(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$$

   Probar que Φ es un producto interno, y encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ.

   (ii) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 1. ii).

3. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en V para el cual la base B resulte ortonormal.

   (i) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1,1),(2,-1)\}$

   (ii) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1,i),(-1,i)\}$

   (iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1,-1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$

   (iv) $V = \mathbb{C}^3$ y $B = \{(1,i,1),(0,0,1),(0,1,i)\}$

4. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ es

   $$\Phi(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1+b)x_3y_3$$

   un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

5. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

   (i) $\langle , \rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K,\ \langle A,B\rangle = tr(AB^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

   (ii) $\langle , \rangle : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

   (iii) $\langle , \rangle : K^n \times K^n \to K,\ \langle x,y\rangle = \overline{y}\,Q^*Q\,x^t$ donde $Q \in K^{n\times n}$ es una matriz inversible, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

6. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \ldots, X^n\}$.

7. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

(i) $V = \mathbb{R}^3\,,\quad S =< (1,2,1) >$

a. Para el producto interno canónico.

b. Para el producto interno definido por

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1.$$

(ii) $V = \mathbb{C}^4\,,\quad S = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

para el producto interno $\langle x,y\rangle = x_1\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3 + 3x_4\overline{y}_4$.

(iii) $V = \mathbb{R}^4\,,\quad S =< (1,1,0,-1),(-1,1,1,0),(2,-1,1,1) >$ para el producto interno canónico.

8. (i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.

(ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.

(iii) En el caso del item (iii), hallar el punto de S más cercano a $(0,1,1,0)$. Calcular la distancia de $(0,1,1,0)$ a S.

9. (i) Se considera $\mathbb{C}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A,B\rangle = tr(AB^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

(ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1,X,X^2,X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S =< 1 >$.

(iii) Se considera $C[-1,1]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.
Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S =< 1,x,x^2,x^3,\operatorname{sen}(\pi x) >$.

(iv) Se considera $C[0,\pi]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$.

a. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1,\cos t,\operatorname{sen} t\}$.

b. Sea S el subespacio de $C[0,\pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

10. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\quad f(x_1,x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

(ii) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3\,,\quad f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

(iii) $B = \{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,1)\}\,,\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]\,,\quad f(p) = p'\quad$ (donde $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$).

(v) $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible, $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(A) = P^{-1}AP\quad$ (donde $\langle A,B\rangle = tr(AB^*)$).

(vi) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]\,,\ \mu_f(p) = fp$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

11. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que Im(f^*) = (Nu (f))$^{\perp}$.

12. Sea V EVPI, $A : V \to V$ una transformación lineal autoadjunta. Probar que S subespacio de V invariante para A sii $S^{\perp}$ lo es.

13. Sea V $\mathbb{C}$ EVPI de dimensión finita, T un operador autoadjunto sobre V. Demostrar que:

   (i) $\|v + iT(v)\| = \|v - iT(v)\|$
   (ii) $v + iT(v) = w + iT(w) \iff v = w$
   (iii) $I + iT$, $I - iT$ son inversibles.
   (iv) Probar que $U = (I + iT)(I - iT)^{-1}$ es un operador unitario.

14. (i) Para cada una de las siguientes matrices, verificar que existe una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que OAO^t sea diagonal y encontrar una:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

   (ii) Para cada una de las siguientes matrices, verificar que existe una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que UAU^* sea diagonal y encontrar una:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica con autovalores 3 y 4 y $(3, 4)$ el autovector asociado a 3. Hallar un autovector asociado a 4. Hallar A y $\sqrt{A}$.

16. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{C}$EVPI. Sea T normal. Demostrar que:

   (i) $T = T_1 + iT_2$, donde T_1 y T_2 son dos operadores autoadjuntos que conmutan.
   (ii) Si T es nilpotente, entonces $T = 0$.
   (iii) Existe $f \in \mathbb{C}[X]$ tal que $f(T) = T^*$.

17. Sean $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{C}$EVPI. Sea T un operador en V. Demostrar que si $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}\ \forall\, v \in V$, entonces T es autoadjunto.

18. Demostrar que una matriz simétrica real tiene una raíz cúbica simétrica; es decir, si A es simétrica real, existe una simétrica real B tal que $B^3 = A$.

19. Hallar en cada caso una matriz simétrica que verifique:

   (i) $1, 2, -1$ son sus autovalores y tenga algun autovector en $S = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$.
   (ii) $-1, -1, 3, 0$ son sus autovalores y que algunos de sus autovectores pertenezcan a $S = \{(x, y, z, w) : 2x - y + z + w = 0; x - y - w = 0\}$