

ALGEBRA LINEAL

Repaso de sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en
- \mathbb{R}
- :

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{iv)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

¿Cambia algo si los sistemas se resuelven en \mathbb{Q} o en \mathbb{C} ?

2. Resuelva los siguientes sistemas y compare los conjuntos de soluciones:

$$\text{i)} \{x + 2y - 3z = 4 \quad \text{ii)} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \end{cases}$$

3. Sea
- H
- un sistema lineal homogéneo de
- n
- ecuaciones con
- m
- incógnitas. Probar:

(i) Si $n < m$, entonces H tiene alguna solución no nula.(ii) Si $m < n$, entonces existe un sistema lineal homogéneo H' de m ecuaciones con m incógnitas cuyo conjunto de soluciones coincide con el conjunto de soluciones de H .

4. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los
- $k \in \mathbb{R}$
- para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

5. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados a cada uno de ellos:

$$\begin{array}{ll}
\text{i)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{array} \right. & \text{ii)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{array} \right. \\
\text{iii)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right. & \text{iv)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 = \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = \beta \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = \gamma \end{array} \right. \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}
\end{array}$$

6. Sea H un sistema lineal no homogéneo y sea p una solución de H . Sea H_0 el sistema lineal homogéneo asociado a H . Probar que si S y S_0 son los conjuntos de soluciones de H y H_0 respectivamente, entonces $S = S_0 + p = \{s + p : s \in S_0\}$.

7. Dado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha_3 \end{array} \right.$$

Determinar los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema admite solución.

8. Determinar para qué valores de a y b en \mathbb{R} cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\begin{array}{ll}
\text{i)} \left\{ \begin{array}{l} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{array} \right. & \text{ii)} \left\{ \begin{array}{l} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{array} \right.
\end{array}$$

9. Encuentre un sistema con coeficientes reales cuya solución general sea

$$\{(1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Matrices

10. Encuentre un contraejemplo para cada uno de las siguiente afirmaciones relativas al producto de matrices:

- (i) $AB = BA$
- (ii) $(AB)^2 = A^2B^2$
- (iii) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$
- (iv) $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$
- (v) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$
- (vi) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$

(vii) $A^2 = A \Rightarrow A = 0 \text{ ó } A = I_n$

11. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $\mathbb{K}^{n \times n}$ no es conmutativo. (Sugerencia: probarlo para $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ y usar multiplicación por bloques.)

12. Caracterizar el conjunto $\{A \in \mathbb{K}^{3 \times 3} / AB = BA \ \forall B \in \mathbb{K}^{3 \times 3}\}$.

13. Exhibir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $A^2 = -I$

14. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ para que:

(i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ii) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

15. Demostrar que si $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $Ax = Bx \ \forall x \in \mathbb{K}^n$, entonces $A = B$.

16. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

17. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar:

(i) Si A es inversible entonces $AB = 0 \Rightarrow B = 0$ y $AB = AC \Rightarrow B = C$

(ii) Si A no es inversible, existe $B \neq 0$, $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que $AB = 0$.

(iii) A, B inversibles $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

18. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar:

(i) $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible

(ii) A inversible $\iff A^t$ inversible.

(iii) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

Nota: Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se llama **matriz transpuesta de A** a la matriz $A^t \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definida por $(A^t)_{ij} := (A)_{ji}, \forall 1 \leq i, j \leq n$.

19. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y sea $b \in \mathbb{K}^n$. Probar que el sistema $Ax = b$ tiene solución única $\iff A$ inversible.