

ALGEBRA LINEAL

Práctica 1: Espacios vectoriales

1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , $k \in \mathbb{K}$, $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

- (i) $0.v = \vec{0}$
- (ii) $k.\vec{0} = \vec{0}$
- (iii) $(-1).v = -v$
- (iv) $-(-v) = v$
- (v) $k.v = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ó $v = \vec{0}$
- (vi) $-\vec{0} = \vec{0}$

2. Probar en cada caso que el conjunto V , con la suma y el producto por escalares definidos, es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} :

(i) $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) / a_i \in \mathbb{K} \forall i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de \mathbb{K} .

- a. $+$: $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$
- b. \cdot : $k.(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (k.a_i)_{i \in \mathbb{N}}$

(ii) Dado X un conjunto, sea $V = \mathbb{K}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } f \text{ es una función}\}$.

- a. $+$: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$
- b. \cdot : $(k.f)(x) = k.f(x) \quad \forall x \in X$

3. Caracterizar geoméricamente todos los subespacios de \mathbb{R}^2 .

4. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como \mathbb{K} -espacio vectorial:

- (i) $S_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / v = a.(1, 0, 0) + b.(1, 1, 1); a, b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (ii) $S_2 = \{a.i / a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- (iii) $S_3 = \{f \in \mathbb{K}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr} f \geq 2\}$, $V = \mathbb{K}[X]$
- (iv) $S_4 = \{f \in \mathbb{K}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr} f \leq 5\}$, $V = \mathbb{K}[X]$
- (v) $S_5 = \{M \in \mathbb{K}^{4 \times 4} / M^t = M\}$, $V = \mathbb{K}^{4 \times 4}$
- (vi) $S_6 = \{M \in \mathbb{K}^{3 \times 3} / \text{tr}(M) = 0\}$, $V = \mathbb{K}^{3 \times 3}$
- (vii) $S_7 = C^\infty(\mathbb{R})$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- (viii) $S_8 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (ix) Dados a y $b \in \mathbb{R}$ fijos, $S_9 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f'' + af' + bf = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (x) $S_{10} = \{f \in C(\mathbb{R}) / \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (xi) $S_{11} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0 \forall r \geq k\}$, $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
5. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ y sea $S = \{x \in \mathbb{K}^m : Ax = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es A . Probar que S es un subespacio de \mathbb{K}^m .
6. Sean S y T subespacios de un \mathbb{K} -espacio vectorial V :
- Probar que $S \cap T$ es un subespacio de V .
 - Encontrar S y T subespacios de $V = \mathbb{R}^2$ tales que $S \cup T$ no sea subespacio.
 - Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T \text{ ó } T \subseteq S$.
7. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales sobre \mathbb{K} :
- \mathbb{K}^n
 - $\mathbb{K}_n[X] = \{f \in \mathbb{K}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\}$
 - $\mathbb{K}[X]$
 - $\mathbb{K}^{n \times n}$
 - \mathbb{C}^n , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
 - $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 ; x - y = 0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
 - $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A = -A^t\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
 - $S_3 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] / f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
 - $S_4 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f''' = 0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
8. Sea $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
- Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$
 - Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$
 - Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$
9. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3 \in V$.
Probar que si $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$ entonces $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_3 \rangle$.

10. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

(i) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $v, w \in V$. Entonces $\langle v, w \rangle = \langle v, w + 5v \rangle$

(ii) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle$.

Entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$

(iii) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $v_1, v_2, v_3, w \in V$.

$\langle v_1, v_2, v_3, w \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \iff w \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

11. Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f'' + f = 0\} = \langle \text{sen } x, \text{cos } x \rangle$.

(Sugerencia: Probar que si $f'' + f = 0$, entonces $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})\text{sen } x}{\text{cos } x}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

12. Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son linealmente independientes sobre \mathbb{K} :

(i) $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 1, 4), (5, 1, 1)$ en \mathbb{R}^3 , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(ii) $(1 - i, i), (2, -1 + i)$ en \mathbb{C}^2 para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(iii) $(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1$ en $\mathbb{K}[X]$

(iv) $f(x) = \text{sen } x, g(x) = \text{cos } x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(v) $f(x) = e^x, g(x) = x, h(x) = e^{-x}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(vi) $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots), v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots), w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

13. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. Probar:

(i) $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i. $\iff \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i.

(ii) $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$

$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i. $\iff \{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i.

(iii) $\lambda \in \mathbb{K}$

$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i. $\iff \{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ son l. i. Notar que i), ii) y iii) justifica el "método de triangulación" para analizar la dependencia o independencia lineal de vectores en \mathbb{K}^n .

14. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 es un conjunto linealmente independiente:

(i) $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\}$

(ii) $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\}$

15. Hallar una base y la dimensión de los siguientes \mathbb{K} -espacios vectoriales

- (i) $\langle (1, 4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7) \rangle$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (ii) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (iii) \mathbb{C} , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- (iv) $\{f \in \mathbb{R}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3 \text{ y } f(2) = f(-1)\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (v) $\{f \in \mathbb{R}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3 \text{ y } f \text{ es un múltiplo de } (x^2 - 2)\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (vi) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / a_i = a_j \forall i, j\}$

16. (i) Probar que el conjunto $\{(1, 0, 0), (0, i, 0), (1, 1, i)\}$ es base de \mathbb{C}^3 como \mathbb{C} -espacio vectorial pero no como \mathbb{R} -espacio vectorial. Calcular la dimensión de \mathbb{C}^3 como \mathbb{R} -espacio vectorial.
- (ii) Probar que el conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de \mathbb{C}^n como \mathbb{C} -espacio vectorial pero no como \mathbb{R} -espacio vectorial.
- (iii) Probar que $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ es una base de \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial?

17. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del \mathbb{K} -espacio vectorial V indicado:

- (i) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (ii) $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

18. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores:

- (i) $S = \langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (ii) $S = \langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- (iii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

19. Hallar la dimensión del \mathbb{R} -espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

- (i) $S = \langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$
- (ii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$

(iii) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / A \cdot x = 0\}$ siendo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

20. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle.$$

21. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V . Determinar si la suma es directa:

(i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) / 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) / x + z = 0\}$

(ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) / 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$

(iii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$ y $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$

(iv) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f(1) = 0\}$ y $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$

(v) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] / f'(0) = f''(0) = 0\}$

22. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$, siendo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \quad \text{y} \quad T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle.$$

23. (i) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ es constante}\}$. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y que $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(ii) Sean $S = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / A = A^t\}$ y $T = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} / A = -A^t\}$ (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T , *matrices antisimétricas*). Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{K}^{n \times n}$ y $S \oplus T = \mathbb{K}^{n \times n}$.

24. Para cada S dado hallar $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$ (en este caso, T se dice un *suplemento* de S con respecto a V):

(i) $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$, $V = \mathbb{R}^4$

(ii) $S = \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} / \text{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{4 \times 4}$

(iii) $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$

25. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

(i) S, T subespacios de \mathbb{R}^3 , $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$

(ii) S, T, W subespacios de \mathbb{R}^5 , $\dim S = \dim T = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$

26. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n - 1$):

- (i) Probar que $\forall v \notin T, T \oplus \langle v \rangle = V$.
- (ii) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$.
Calcular $\dim(S \cap T)$.
- (iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

27. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

- (i) $V = \mathbb{K}^n$; $v = (x_1, \dots, x_n)$ y $B = E$ la base canónica
- (ii) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, 2, -1)$ y $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$
- (iii) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$
- (iv) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$
- (v) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$
- (vi) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

28. En cada uno de los siguientes casos, calcular $C(B, B')$, hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B' :

- (i) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$, $v = (2, 3)$
- (ii) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$,
 $v = (-1, 5, 6)$
- (iii) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3, 1 + X, X^2\}$, $B' = \{1, X + 3, X^2 + X\}$, $v = X$
- (iv) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$, $v = 2.v_1 + 3.v_2 - 5.v_3 + 7.v_4$
- (v) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$
 E^{ij} es la matriz que tiene un 1 en el lugar ij y 0 en todos los demás lugares.

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}, v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

29. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y sean B, B' y B'' bases de V .

Probar que $C(B, B'') = C(B', B'').C(B, B')$. Deducir que $C(B, B')$ es una matriz invertible con $C(B, B')^{-1} = C(B', B)$.

30. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ dos bases de \mathbb{K}^n . Sea M la matriz cuyas columnas son v_1, \dots, v_n y sea N la matriz cuyas columnas son w_1, \dots, w_n (ordenadamente). Probar que $C(B, B') = N^{-1}M$.

Ejercicio para entregar el 10/2/03:

Sean

$S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ (*funciones pares*) y

$T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ (*funciones impares*).

Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.