ALGEBRA LINEAL

Práctica 3: Espacio Dual

1. Sea $S \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ el subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* \,/\, \varphi(1,-1,2) = 0\}$. Encontrar una base de S.

2. Dadas las bases B del K-espacio vectorial V, hallar sus bases duales:

   (i) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,-1),(2,0)\}$

   (ii) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

   (iii) $V = \mathbb{R}_3[X]$, $B = \{-X+2, X-1, X^2-3X+2, X^3-3X^2+2X\}$

3. Sea $B' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

   $$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 \qquad \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3 \qquad \varphi_3(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3$$

   Hallar la base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $B' = B^*$

4. Sean f_1 , f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las siguientes formas lineales:

   $$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx \qquad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\,dx$$

   Probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$. Hallar una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$

5. Sea V un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial de dimensión n. Probar que:

   $$\#\{S \subseteq V \text{ subespacio} \,/\, \dim(S) = 1\} = \#\{S \subseteq V \text{ subespacio} \,/\, \dim(S) = n-1\}$$

   Calcular dicho número.

6. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ y sea $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la canónica.

   (i) Calcular las coordenadas de φ en E^*

   (ii) Calcular las coordenadas de φ en la base $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$

   (iii) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1,x_2,x_3)/2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $B \subset \mathbb{R}^3$ la base $B = \{(0,0,1),(0,1,-1),(1,-1,0)\}$. Encontrar una ecuación para S en la base B

   (Sugerencia: notar que B^* es la base dual de B y no hacer ninguna cuenta.)

7. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ la base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$. Encontrar las coordenadas de la base dual de B en la base dual de la canónica.

8. Sean B y B_1 las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por

$$B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \text{ y } B_1 = \{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$$

Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1,-3,2)$ respecto de B^*, calcular sus coordenadas respecto de B_1^*.

9. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V^*$ en los siguientes casos:

   (i) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = < (1,-1,2),(2,1,3),(1,5,0) >$

   (ii) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = < (1,1,-1,1),(2,-1,3,1) >$

   (iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \left\{(x_1,x_2,x_3)\,/\, \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\right\}$

   (iv) $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\, \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}\right\}$

10. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / AB = 0\}$.

    Sea $f \in W^\circ$ tal que $f(I_2) = 0$ y $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Calcular $f(B)$.

11. Para los siguientes subespacios S y T de V, determinar una base de $(S+T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$

    (i) $V = \mathbb{R}^4$, $S = < (1,1,-1,1),(2,-1,3,1) >$, $T = < (2,-4,8,0),(-1,1,2,3) >$

    (ii) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\, \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}\right\}$, $T = < (2,1,3,1) >$

    (iii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \left\{(x_1,x_2,x_3)\,/\, \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}\right\}$,

    $T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\,2x_1 - x_2 = 0\}$

12. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

13. Sea $tr : K^{n\times n} \to K$ la forma lineal traza y dado $a \in K^{n\times n}$ se define

    $f_a : K^{n\times n} \to K$ como $f_a(x) = tr(ax)$.

    (i) Probar que $f_a \in (K^{n\times n})^* \ \ \forall\, a \in K^{n\times n}$

    (ii) Probar que $f_a(x) = 0 \ \ \forall\, x \in K^{n\times n} \ \Rightarrow a = 0$

    (iii) Se define $\gamma : K^{n\times n} \to (K^{n\times n})^*$ como $\gamma(a) = f_a$ Probar que γ es un isomorfismo.

    (iv) Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definida por:

    $$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3a_{11} - 2a_{12} + 5a_{22}$$

    Encontrar una matriz $a \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ \gamma(a) = f$.

14. Sea $\varphi \in (K^{n\times n})^*$ tal que $\varphi(ab) = \varphi(ba) \ \ \forall\, a\,,\, b \in K^{n\times n}$. Probar que $\exists\, \alpha \in K \,/\, \varphi = \alpha.tr$. Deducir que si $\varphi(ab) = \varphi(ba) \ \ \forall\, a\,,\, b \in K^{n\times n}$ y $\varphi(I_n) = n$ entonces $\varphi = tr$.

15. Sean $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \ \in K \ , \alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Para cada $i\,,\, 0 \leq i \leq n$ se define $\epsilon_{\alpha_i} : K_n[X] \to K$ como $\epsilon_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$

    (i) Probar que $B_1 = \{\epsilon_{\alpha_0}, \ldots, \epsilon_{\alpha_n}\}$ es una base de $(K_n[X])^*$

    (ii) Sea $B = \{P_0, \ldots, P_n\}$ la base de $K_n[X]$ tal que $B^* = B_1$. Probar que el polinomio

    $$P = \sum_{i=0}^{n} \beta_i.P_i$$

    es el único polinomio en $K[X]$ de grado menor o igual que n tal que, $\forall\, i\,,\, 0 \leq i \leq n$, $P(\alpha_i) = \beta_i$. Este polinomio se llama el **polinomio interpolador de Lagrange.**

16. Sean V y W K-espacios vectoriales y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Se define la función $f^t : W^* \to V^*$ de la siguiente manera:

    $$f^t(\varphi) = \varphi \circ f \ \forall \varphi \in W^*$$

    f^t se llama la función **transpuesta** de f.

    (i) Probar que f^t es una tranformación lineal.

    (ii) Probar que $(Im(f))^\circ = \mathrm{Nu}(f^t)$ y que $Im(f^t) = (\mathrm{Nu}(f))^\circ$

    (iii) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ y sea $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$
    Si $B = \{(1,2), (1,3)\}$ y $B_1 = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$, calcular $|f|_{BB_1}$ y $|f^t|_{B_1^* B^*}$.

    (iv) Si B y B_1 son bases finitas de V y W respectivamente, probar que

    $$|f^t|_{B_1^* B^*} = (|f|_{BB_1})^t$$

$*$ 17. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sean $f\,,\,g\in V^*$ tales que $fg\in V^*$.

Probar que $f=0$ ó $g=0$.

$*$ 18. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sean $v_1,\ldots,v_n$ en V vectores no nulos. Probar que existe una forma lineal $f\in V^*\,/\,f(v_i)\neq 0\;\forall\, i\,,\;1\leq i\leq n$.

Ejercicio para entregar el 24/02/03**:**

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre K. $f\;,\;g:V\to K$ transformaciones lineales no nulas. Probar que:

$$\exists\;\;\alpha\in K,\;\alpha\neq 0\;/\;f=\alpha g\Longleftrightarrow \mathrm{Nu}(f)=\mathrm{Nu}(g)$$