Algebra Lineal

Práctica 5: Autovalores y autovectores - Diagonalización

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos:
   (Analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$)

   i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$

   iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$ viii) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$

2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ las raíces de χ_A contadas con multiplicidad.

   (i) Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

   (ii) Probar que $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

3. Sea $A \in K^{n\times n}$.

   (i) Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

   (ii) Probar que si A es inversible, entonces 0 no es autovalor de A; y si x es un autovector de A, entonces x es un autovector de A^{-1}.

4. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

   (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a) $P = X - 1$, b) $P = X^2 - 1$, c) $P = (X-1)^2$

   (ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$

5. Sean A, C y $D \in K^{n\times n}$ tales que $A = CDC^{-1}$. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n = CD^nC^{-1}$

6. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

   (i) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (iii) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

   (iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

8. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el característico):

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{iii)} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad , \quad \text{iv)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{v)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{vi)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{ix)} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad , \quad \text{x)} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

9. Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

   (i) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]\,,\ f(P) = P' + 2.P$

   (ii) $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}\,,\ f(A) = A^t$

10. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación.

    (i) Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de δ asociado al autovalor λ. (Observar que entonces δ tiene infinitos autovalores.)

    (ii) Mostrar que no existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tal que $P(\delta) = 0$.

11. Sea $A \in K^{n\times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

    Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

12. Para cada una de las matrices A del ejercicio 1, sea U una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(U, B)$.

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

(i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

(ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

14. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Determinar todos los a , b y $c \in K$ para los que A es diagonalizable.

15. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k + k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

16. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: no intentar calcular el polinomio característico.

17. Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene a $(1, -1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$ y, además, $\chi_A \in \mathbb{Q}[X]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿Es A única?

18. (i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2.A$ son -1, 3 y 8.

(ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3.I_4$. Hallar los restantes autovalores de A.

19. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que verifica $A^2 + I_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.

20. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que dim (Im (f)) $= 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

21. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de $\mathbb{C}^n$ tal que $|f|_B$ es triangular superior.

22. Sean A , B y $D \in K^{n\times n}$.

   (i) Probar que si D es una matriz diagonal que sólo tiene unos y ceros en la diagonal entonces $\chi_{AD} = \chi_{DA}$.

   (ii) Probar que para toda B, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

   Sugerencia: usar equivalencia (no semejanza) de matrices.

23. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de χ_f es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

24. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$$

   (i) Hallar, para cada $0 \leq i \leq 5$, un subespacio S_i de $\mathbb{R}^5$ con $\dim(S_i) = i$ que sea f-invariante.

   (ii) Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.

25. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\chi_A = (x - \alpha)(x - z)(x - \bar{z})$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Sea $g_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal $g_A(x) = Ax$.

   (i) Probar que existe v_1, autovector de g_A de autovalor α, con todas sus coordenadas reales.

   (ii) Sea $w = v_2 + iv_3$, con $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, un autovector de g_A asociado al autovalor z. Probar que $\overline{w} = v_2 - iv_3$ es un autovector de g_A de autovalor $\bar{z}$.

   (iii) Se considera $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $f_A(x) = Ax$. Probar que $< v_2, v_3 > \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subespacio f_A-invariante de dimensión 2.

   (iv) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que B es una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar $|f_A|_B$.

26. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, y sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f_A(x) = Ax$. Hallar subespacios propios S y T de $\mathbb{R}^3$, f_A-invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

27. (i) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.

(ii) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.