Algebra Lineal

Práctica 6: Forma de Jordan

1. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \le j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

3. Dadas las matrices A y A' en $K^{6\times 6}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (i) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A'.

   (ii) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_5[X]$ tales que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A'.

   (iii) Calcular A^k para cada $k \in \mathbb{N}$.

4. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ una matriz nilpotente tal que $A^5 \neq 0$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

5. Sean $A_i \, (1 \le i \le 6)$ matrices en $\mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i} = X^3 \quad (1 \le i \le 6)$. ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

6. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

7. (i) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

   (ii) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ tal que $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

8. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -10 & 16 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Para cada $a \in \mathbb{R}$, hallar la forma y una base de Jordan de A.

10. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X-1)^3(X-3)^2$ y $m_A = m_B$. Decidir si, necesariamente, A es semejante a B

11. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (i) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2 \quad ; \quad m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$

   (ii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5 \quad ; \quad m_A(X) = (X-7)^2$

   (iii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7 \quad ; \quad m_A(X) = (X-2)^3$

   (iv) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4 \quad ; \quad m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$

12. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

   $\text{rg}(A-\lambda_1 Id) = 13$, $\text{rg}(A-\lambda_1 Id)^2 = 11$, $\text{rg}(A-\lambda_1 Id)^3 = 10$, $\text{rg}(A-\lambda_1 Id)^4 = 10$,

   $\text{rg}(A-\lambda_2 Id) = 13$, $\text{rg}(A-\lambda_2 Id)^2 = 11$, $\text{rg}(A-\lambda_2 Id)^3 = 10$, $\text{rg}(A-\lambda_2 Id)^4 = 9$,

   $\text{rg}(A-\lambda_3 Id) = 13$, $\text{rg}(A-\lambda_3 Id)^2 = 12$, $\text{rg}(A-\lambda_3 Id)^3 = 11$.

   Hallar su forma de Jordan.

13. Hallar la forma de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

14. Sea $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean A-invariantes.

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Hallar la forma y una base de Jordan para A.

(ii) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

16. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si A y B son semejantes.

17. Sea $T : V \to V$ lineal V $\mathbb{C}$-e.v. de dimensión finita. Probar que existen $D, N : V \to V$ lineales tales que D es diagonalizable, N nilpotente, $DN = ND$ y $T = N + D$. ¿Son N y D unicos?

18. Sea $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ una matriz tal que su polinomio característico es $(X-1)^4$. Probar que A es semejante a A^2.

19. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14\times 14}$ que verifica, simultáneamente:
$m_A = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)^2(X-\lambda_4)^3$ (con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) , $\text{rg}(A-\lambda_1 I) = 11$,
$\text{rg}(A-\lambda_1 I)^2 = 10$, $\text{rg}(A-\lambda_3 I) = 12$, $\text{rg}(A-\lambda_3 .I)^2 = 10$ y $\text{rg}(A-\lambda_4 I) = 13$.

20. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

21. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $J(\lambda, m) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ la matriz

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(i) Calcular $J(\lambda, m)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Generalizar para cualquier potencia de una matriz formada por bloques de Jordan.

Sugerencia: $J(\lambda, m) = \lambda I_m + J(0, m)$.

$(*)$ (ii) Verificar que $\operatorname{rg}(J(\lambda, m)^k - \lambda^k I_m) = m - 1$ para $\lambda \neq 0$.

$(*)$ (iii) Si $\lambda \neq 0$, hallar la forma de Jordan de $J(\lambda, m)^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.